PHẠM VIẾT DẦN

KHÁM PHÁ THẾ GIỚI





VẺ ĐẸP CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG THIÊN NHIÊN


NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



Xin chúc mừng bạn Võ ý Ngọc :

Là thành viên thứ 100 lần 2 của trang chúng tôi

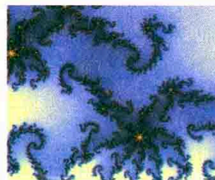
Nguyễn Hồng Quân

PHẠM VIẾT DẦN

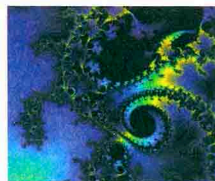


KHÁM PHÁ THẾ GIỚI

VẺ ĐẸP
CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG THIÊN NHIÊN







NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

6T
GD - 06
02-2006/CXB/74-1844/GD
Mã số: 8I170m6-TTS

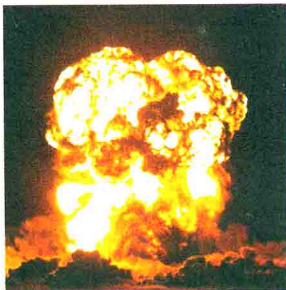
LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Các em học sinh thân mến !

Như các em đã biết, các đường cong, các hình cầu, các hình trụ, vv... được khảo sát kĩ trong các sách giáo khoa về hình học thực ra chỉ là những trường hợp lí tưởng. Thực tế trong thiên nhiên lại tồn tại chủ yếu những hình dạng gồ ghề, gãy góc như đám mây, ngọn núi, bờ biển.

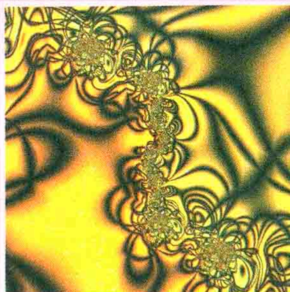
BENOIT MANDELBROT (Be-no-it Man-đen-brôt) nhà toán học vĩ đại của thế kỉ XX, nói rằng: "Các đám mây không phải là hình cầu, các ngọn núi không phải là hình nón". Và chính ông là người đã đề xướng từ " FRACTAL" hơn 20 năm về trước để chỉ các đối tượng hình học có hình dáng gồ ghề, không trơn nhẵn trong thiên nhiên.





Cụ thể hơn, fractal là những vật thể có tính đối xứng sắp xếp trong một phạm vi nhất định, có nghĩa là khi ta chia một vật thể fractal, với hình dáng gồ ghề, gãy góc ra thành những phần nhỏ, thì mỗi phần nhỏ đó vẫn giữ những đặc tính đối xứng trong một cấu trúc tưởng như là hỗn loạn. Hình dáng các đám mây, đường đi của các tia chớp là những ví dụ mà chúng ta dễ nhìn thấy được.

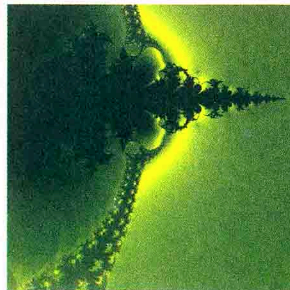
Một ví dụ nữa có tính phức tạp hơn đó là việc phân nhánh của các mạch máu trong cơ thể con người được chia nhỏ từ mạch chủ đến các vi mạch, nhỏ đến mức các tế bào máu phải di chuyển theo hàng một. Bằng việc áp dụng hình học fractal vào nghiên cứu thì việc phân nhánh của các mạch máu sẽ trở nên dễ hiểu hơn nhiều.



Trong mấy chục năm trở lại đây cùng với việc hình học fractal ngày càng phát triển, các nhà Vật lí, Toán học , Sinh học, Thiên văn học đã thống nhất đi đến những ý tưởng mới. Đó là các hệ đơn giản có thể sinh ra những diễn tiến phức tạp, và ngược lại các hệ phức tạp vẫn có thể sinh ra những diễn tiến đơn giản.

Một trận động đất lớn chẳng qua là mô hình khuyếch đại của trận động đất nhỏ. Các cơn bão nhỏ trong chừng mực nào đó cũng diễn tiến như những cơn bão lớn. Các đám mây dù lớn hay nhỏ, dù ở những độ cao khác nhau vẫn bồng bềnh trên bầu trời.

Khi phóng đại các chi tiết của một vật thể fractal ta chỉ thu được những hình ảnh có dáng vẻ tương tự, nhưng không khi nào giống hẳn hình ảnh ban đầu.



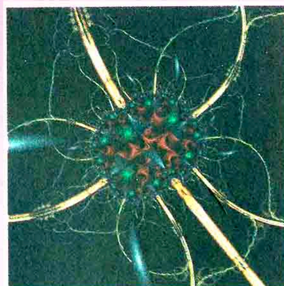
Trong Y học , lí thuyết fractal cho ta một hình ảnh về sự phân nhánh các mạch máu, các mang phổi, đồng thời cũng giúp cho các nhà khoa học có được những giải thích chính xác hơn về căn nguyên của những chứng bệnh tim mạch, tâm thần, vv...

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Hình học fractal cho ta thấy vẻ đẹp từ sự sắp xếp, trộn lẫn giữa trật tự và không trật tự.

Cũng cần nói thêm cho rõ rằng, hình học fractal phát triển được là nhờ có máy tính điện tử. Dùng máy tính điện tử người ta có thể mô phỏng được hầu hết các quá trình, các hình dáng, các chuyển động phức tạp trong tự nhiên.

Fractal áp dụng trực tiếp cho thế giới tự nhiên, người ta có thể dựa vào hình học fractal để có thể tính toán được, mô phỏng được những hệ phức tạp. Hình học fractal có nhiều ứng dụng phong phú, đa dạng vào rất nhiều lĩnh vực khác nhau, từ các ngành xây dựng, khai thác dầu khí, chế tạo dụng cụ chính xác đến những ứng dụng hiệu quả trong y học, sinh lí học, âm nhạc vv...



Hình học fractal đã thu hút được sự quan tâm của đông đảo các nhà khoa học và trở thành một xu hướng phát triển mới của toán học hiện đại.

Chính hình học fractal đã làm thay đổi cách nhìn của chúng ta về thiên nhiên và thế giới.

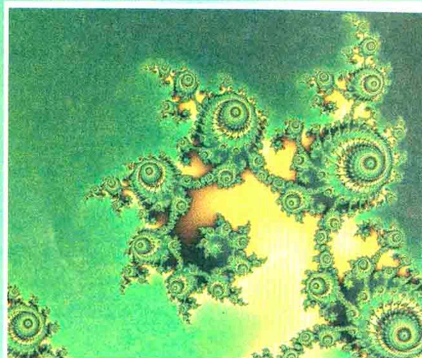
Để bước đầu tiếp cận với hình học fractal đầy lí thú, NXB Giáo dục xin trân trọng giới thiệu với các em học sinh THCS, THPT và tất cả các bạn đọc những kiến thức đầu tiên rất cơ bản của hình học fractal. Chúng tôi mong rằng khi gấp lại cuốn sách này, các em sẽ có thêm hành trang kiến thức và niềm say mê để tiếp tục KHÁM PHÁ THẾ GIỚI.

Trong mấy nghìn năm qua chúng ta đã rất quen thuộc với hình học Euclid, môn hình học giúp chúng ta tìm hiểu, tính toán các hình học thông thường như tam giác, hình tròn, hình vuông... Hình học Euclid (Ơ-clit) giúp chúng ta trong công việc đo đạc, thiết kế, xây dựng, hay mô tả những cấu trúc phức tạp như cấu trúc nguyên tử chẳng hạn... Nhưng hình học Euclid lại không thể giúp chúng ta hình dung những diễn tiến trong các vật thể rất bình thường như bờ biển, đám mây, cây cối, núi đồi hay chính các bộ phận trong cơ thể con người như hệ tiêu hóa, tuần hoàn hay hệ hô hấp...

Bây giờ chúng ta hãy thử tìm hiểu lá phổi chẳng hạn, lá phổi của chúng ta có khoảng 300 triệu phế nang dùng để trao đổi không khí với hệ thống mao mạch. Các phế nang này chiếm một diện tích vô cùng lớn (khoảng trên $100m^2$) nhưng lại nằm gọn trong thể tích của lá phổi. Đến đây chắc chúng ta sẽ bắt đầu thắc mắc tại sao tự nhiên lại có thể tạo ra được những cấu trúc phức tạp như vậy ? Những cấu trúc tinh vi như vậy không phải là duy nhất trong cơ thể chúng ta.

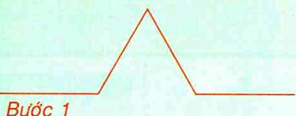
Thật ra, các cấu trúc này tuy phức tạp như vậy nhưng cách xây dựng lên chúng lại hết sức đơn giản có khi chỉ là một quá trình lặp đi lặp lại một quy tắc biến đổi đơn giản nào đó. Chúng ta hãy quan sát một bông hoa súp lơ chẳng hạn, mỗi bông thường có khoảng từ 12 đến 14 cánh nhưng khi tách rời các cánh này ra thì ta lại thấy mỗi cánh có hình dạng gần giống như cả bông hoa súp lơ ban đầu. Hay nói một cách khác mỗi cấu trúc dù phức tạp đến đâu cũng có một đặc trưng nào đó mà ta có thể tách ra thành những bộ phận nhỏ mà mỗi bộ phận này lại có cấu trúc giống hệt với tổng thể, nó chính là một bản sao thu nhỏ của tổng thể. Điều này thật thú vị phải không các em ? Các cấu trúc như vậy được gọi là cấu trúc fractal.





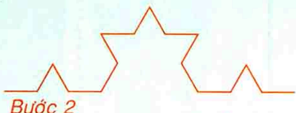
ĐƯỜNG CONG VON KOCH (VÔN-CÔC)

Để tìm hiểu ***đường cong Von Koch*** chúng ta sẽ bắt đầu với một đoạn thẳng đầu tiên và lần lượt biến đổi đoạn thẳng này theo các bước tuần tự như sau :



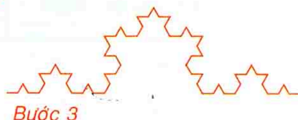
Bước 1

Chia đoạn thẳng thành 3 phần bằng nhau, bỏ đi đoạn thẳng ở giữa và thay bằng 2 cạnh của một tam giác đều có cạnh đúng bằng đoạn thẳng đã bỏ đi.



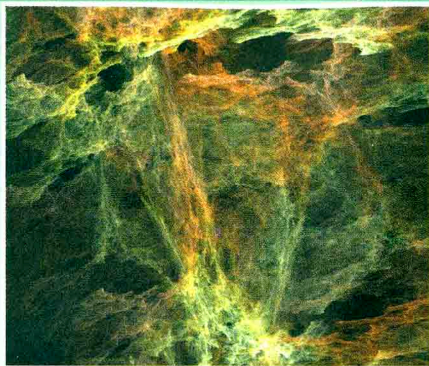
Bước 2

Tiến hành biến đổi như vậy đối với 4 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 1.



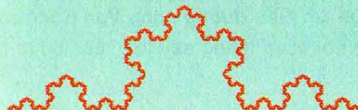
Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 16 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 2.





Cứ tiếp tục biến đổi như vậy đến khi số bước là vô cùng lớn chúng ta sẽ thu được một đường cong có hình dáng như hình bên.

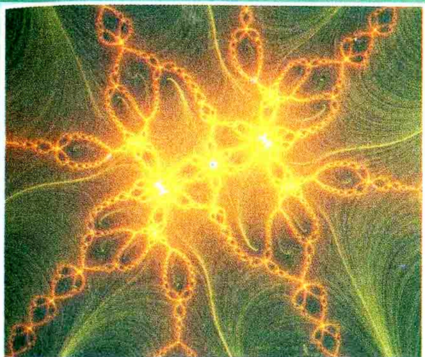


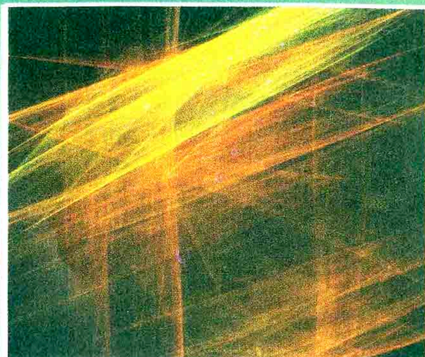
Đường cong này được đặt tên là **đường cong Von Koch** do nhà toán học Von Koch người Thụy Điển nghĩ ra năm 1906. Đây là một trong những đường cong được tìm ra sớm nhất của hình học fractal.

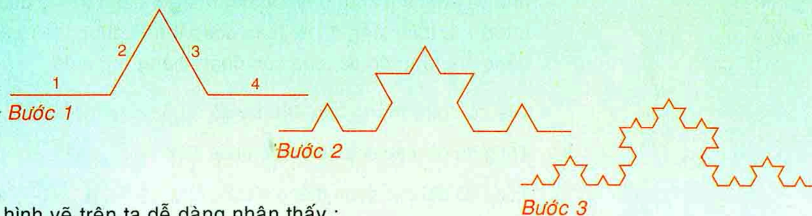
Bây giờ chúng ta sẽ tính tổng số các đoạn thẳng cũng như tổng độ dài của chúng khi tạo ra đường cong Von Koch ở bước thứ n.



Một con tem có hình đường cong Von Koch nổi tiếng







Nhìn vào hình vẽ trên ta dễ dàng nhận thấy :

Ở bước 1 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : 4

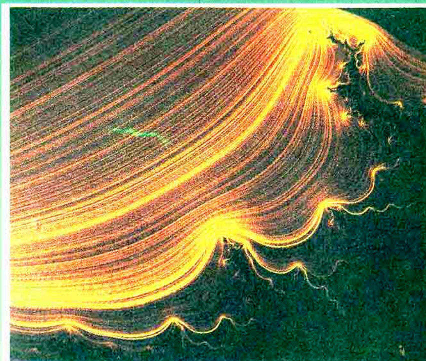
Ở bước 2 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : $4 \times 4 = 16 = 4^2$

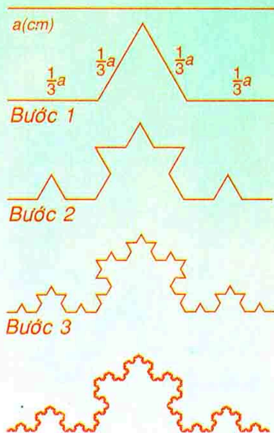
Ở bước 3 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : $4 \times 16 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$

...

Vậy ở bước thứ n tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : 4^n







Ta cũng dễ dàng nhận thấy tổng độ dài của các đoạn thẳng được tạo ra ở bước 1 bằng $^4/_3$ độ dài của đoạn thẳng ban đầu. Tương tự như vậy đối với từng đoạn thẳng trong 4 đoạn thẳng được tạo ra sau bước 1 ta thấy tổng độ dài các đoạn thẳng được tạo ra sau mỗi bước bằng $^4/_3$ tổng độ dài của các đoạn thẳng trước đó.

Giả sử đoạn thẳng ban đầu có độ dài là a (cm), ta có :

Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 1 là : $\frac{4}{3}$ a (cm)

Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 2 là : $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3}a = (\frac{4}{3})^2 a$ (cm)

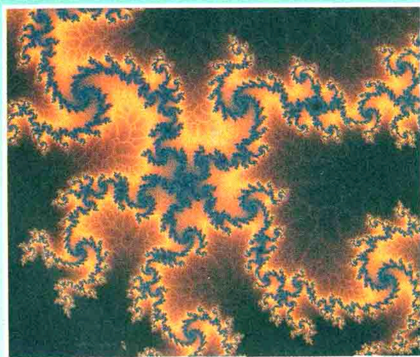
Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 3 là : $\frac{4}{3} \times (\frac{4}{3})^2 a = (\frac{4}{3})^3 a$ (cm)

...

Vậy tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước thứ n là : $(\frac{4}{3})^n a$ (cm).

Ta nhận thấy cứ sau mỗi bước biến đổi tổng độ dài được tạo ra sẽ lớn hơn tổng độ dài các đoạn thẳng trước đó vì vậy đường cong Von Koch có độ dài vô hạn. Như vậy từ một đoạn thẳng ban đầu có độ dài hữu hạn qua các bước biến đổi đơn giản chúng ta sẽ có một đường cong kì lạ mà độ dài của nó là vô hạn.



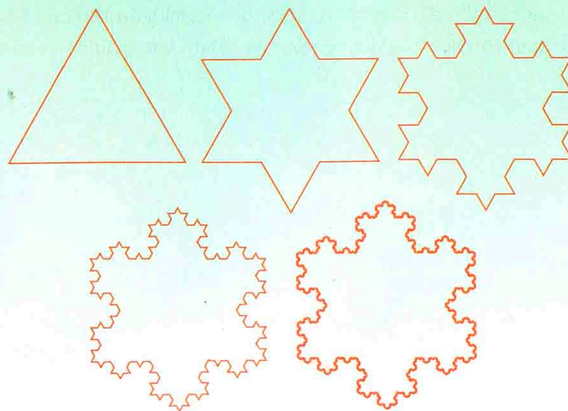


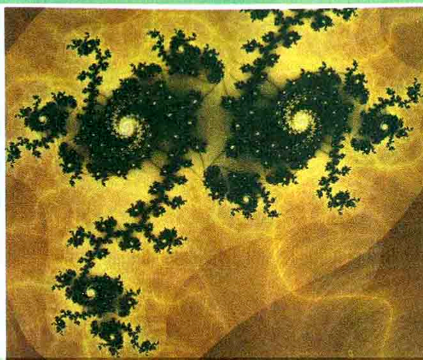
BÔNG TUYẾT VON KOCH

Nếu như chúng ta tiến hành xây dựng đường cong Von Koch về phía ngoài trên ba cạnh của một tam giác đều ta sẽ được một hình có tên gọi là **bông tuyết Von Koch**.



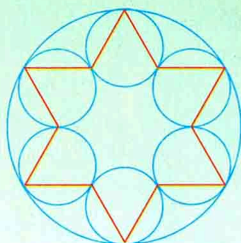
Bóng dáng bông tuyết Von Koch xuất hiện cùng với những vòng tròn bí ẩn trên những cánh đồng.

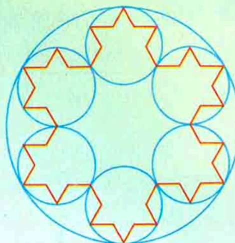


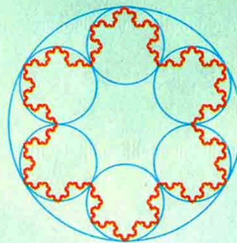


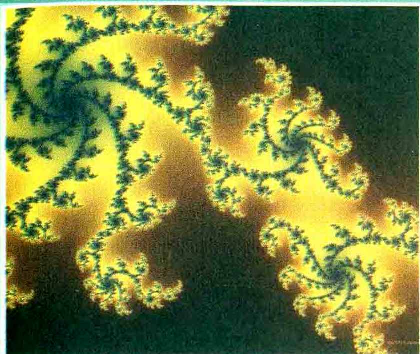


Chính vì đường cong Von Koch dài vô hạn nên bông tuyết Von Koch cũng có chu vi dài vô hạn. Vậy diện tích của bông tuyết Von Koch thì sao ? Điều thú vị là mặc dù có chu vi dài vô hạn nhưng diện tích của bông tuyết Von Koch lại hữu hạn. Hình minh hoạ dưới đây sẽ giúp chúng ta nhận thấy dù có biến đổi bao nhiêu bước đi nữa thì diện tích của bông tuyết Von Koch cũng không thể vượt quá diện tích của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ban đầu.



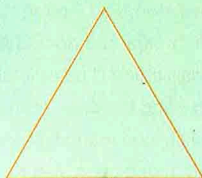


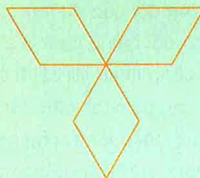


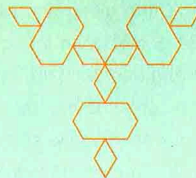


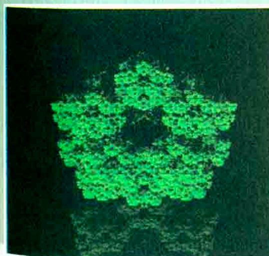


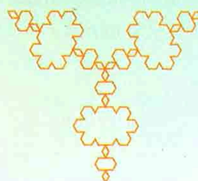
Còn nếu như chúng ta xây dựng đường cong Von Koch về phía trong của tam giác đều ban đầu chúng ta sẽ thu được một hình mới khác hẳn và hình này được gọi là **đối bông tuyết Von Koch.**

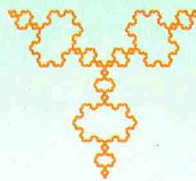






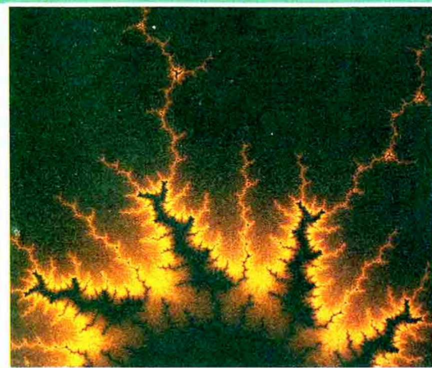




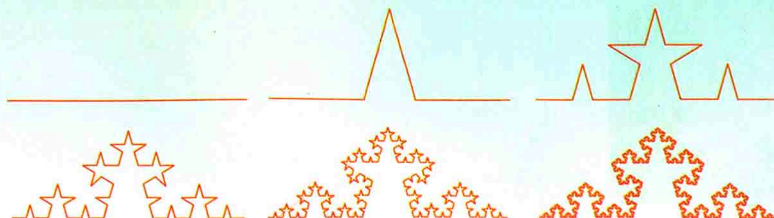


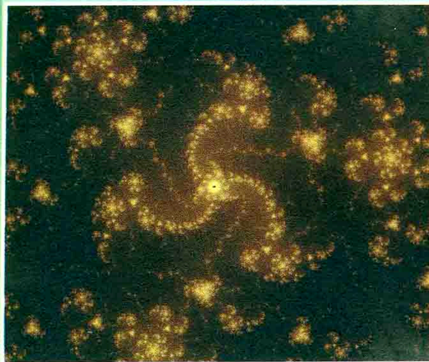
Bông tuyết Von Koch trong không gian 3 chiều

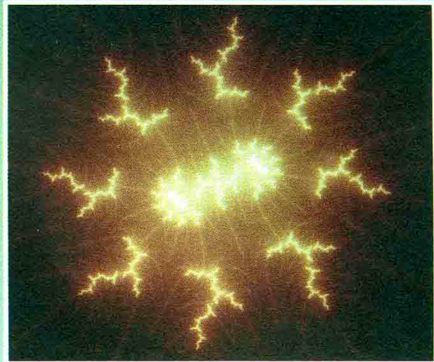




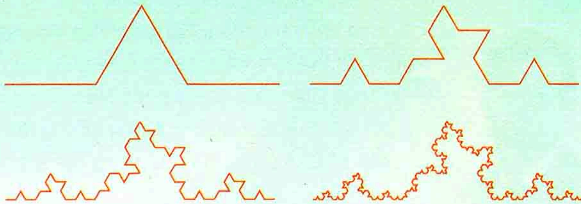
Cũng giống như cách biến đổi của đường cong Von Koch, bằng cách thay đổi quy tắc biến đổi : Bỏ đi một đoạn thẳng có độ dài bất kì nằm ở chính giữa của đoạn thẳng ban đầu (thay vì chia đoạn thẳng ban đầu làm 3 phần bằng nhau rồi bỏ đi đoạn thẳng ở giữa), sau đó thay đoạn thẳng này bằng hai cạnh của một tam giác cân có cạnh cân đúng bằng hai đoạn thẳng còn lại và cứ tiếp tục biến đổi như vậy chúng ta sẽ thu được một đường cong mới chỉ còn mang hình dáng của đường cong Von Koch. Tuy nhiên chúng ta thấy đường cong này cũng như đường cong Von Koch còn quá đều đặn chưa phản ánh được các hình ảnh trong tự nhiên như mép một mảnh vỡ hay một đoạn đường bờ biển chẳng hạn. Lí do là trong quá trình biến đổi chưa có yếu tố ngẫu nhiên xen vào.





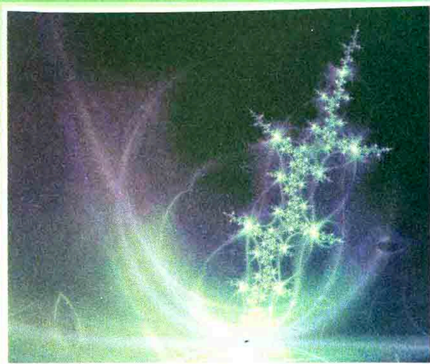


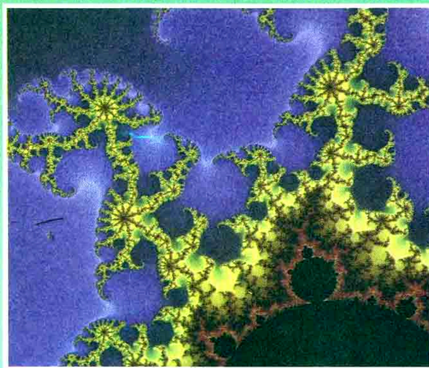
Bây giờ chúng ta xây dựng lại đường cong Von Koch nhưng có thêm yếu tố ngẫu nhiên bằng cách mỗi khi thay đoạn thẳng ở giữa bằng 2 cạnh của tam giác đều ta có thể đặt hai cạnh đó ở phía trên hoặc phía dưới của đoạn thẳng cần thay một cách tuỳ thích.



Sau một số bước biến đổi như vậy ta sẽ thấy một đường cong mang hình dáng của những sự vật hoặc hiện tượng nào đó trong tự nhiên như hình dáng một đám mây, một miếng mảnh vỡ hay một đoạn đường bờ biển gồ ghề nào đó.

Như vậy chỉ với một đoạn thẳng ban đầu, sau một số bước biến đổi đơn giản, lặp đi lặp lại chúng ta đã thu được những hình ảnh đẹp đầy bất ngờ.





HÃY LÀM QUEN!

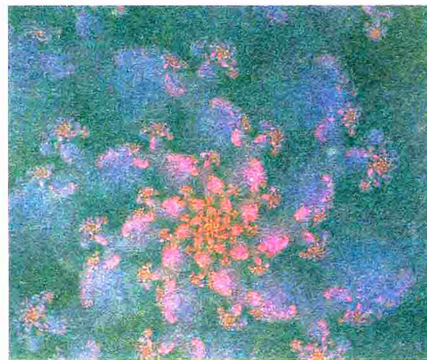


Nhà toán học Niels Fabian Helge Von Koch (Ni-en Fa-bi-an Hen Vôn Cốc) sinh ngày 25 tháng 1 năm 1870, tại Stockholm (Xtôc-khôm) trong một gia đình quý tộc Thuỵ Điển, ông nội của ông Niels Samuel Von Koch (Ni-en Sa-mu-en Vôn Cốc) (1801-1881) là một chưởng lí còn cha ông Richert Vogt Von Koch (Ri-sớt Vôt Vôn Cốc) (1838-1913) là một trung tá trong đội kị binh hoàng gia Thuỵ Điển.

Ngay từ nhỏ ông luôn là một học sinh xuất sắc, năm 1887 ông vào học tại trường đại học Stockholm, một trường đại học nổi tiếng của Thuỵ Điển. Ông bảo vệ thành công luận án tiến sĩ toán học ngày 26 tháng 5 năm 1892 lúc mới 22 tuổi và đến năm 1911 ông trở thành giáo sư toán của trường đại học Stockholm.

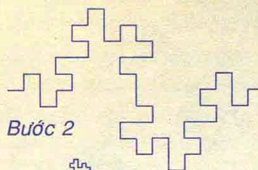
Ông mất ngày 11 tháng 3 năm 1924 tại Danderyd (Đan-đơ-ri), Stockholm, Thuỵ Điển.





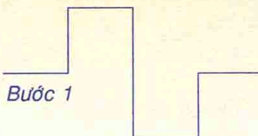
ĐƯỜNG CONG MINKOWSKI (MIN-CỐP-XKI)

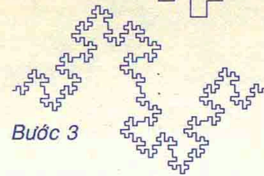
Ta cũng bắt đầu với một đoạn thẳng cho trước nhưng biến đổi nó theo một cách khác.



Bước 1

Chia đoạn thẳng thành 4 phần bằng nhau, bỏ đi 2 đoạn thẳng ở giữa và mỗi đoạn thẳng bỏ đi sẽ được thay bằng 3 cạnh của một hình vuông có cạnh đúng bằng đoạn thẳng đã bỏ đi. (Hai hình vuông này được dựng về hai phía của đoạn thẳng ban đầu).



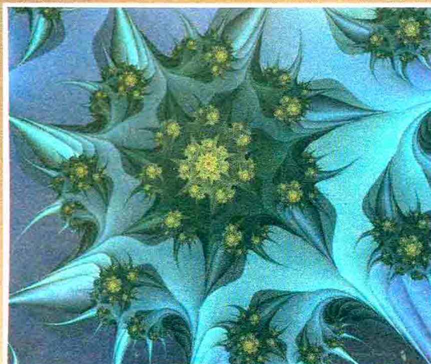


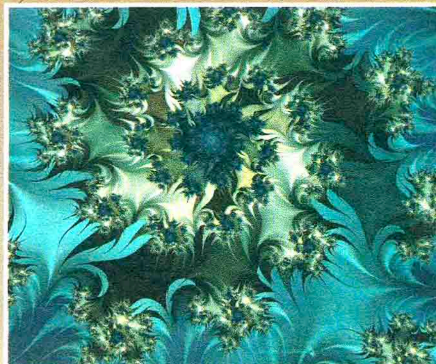
Bước 2

Tiến hành biến đổi như vậy đối với 8 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 1.

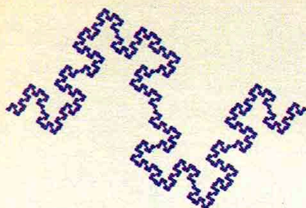
Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 64 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 2.

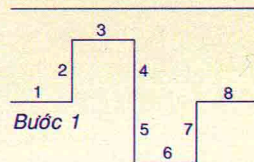


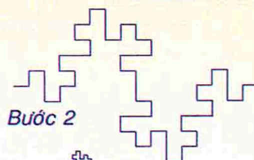


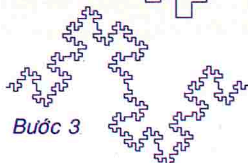
Cứ tiếp tục biến đổi như vậy chúng ta sẽ thu được một đường cong có hình dáng như sau :



Đường cong này được đặt tên là **đường cong Minkowski** do nhà toán học Hermann Minkowski (Héc-man Min-cốp-xki) người Lithuania (Li-thua-ni-a) nghĩ ra.







Tương tự như đường cong Von Koch ta dễ dàng nhận thấy :

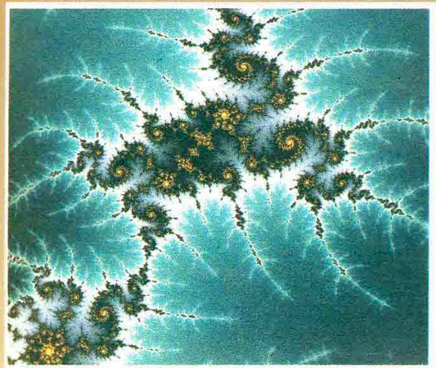
Ở bước 1 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : 8

Ở bước 2 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : $8 \times 8 = 64 = 8^2$

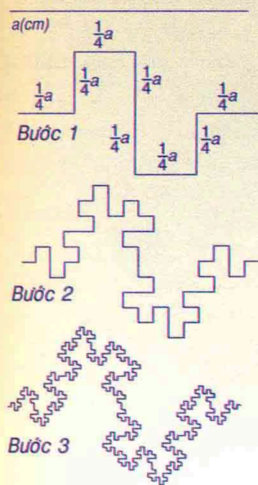
Ở bước 3 tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : $8 \times 64 = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$

...

Như vậy ở bước thứ n tổng số đoạn thẳng được tạo ra là : 8^n







Khác với đường cong Von Koch ta thấy tổng độ dài của các đoạn thẳng được tạo ra ở bước 1 gấp hai lần độ dài của đoạn thẳng ban đầu.

Tương tự như vậy đối với từng đoạn thẳng trong 8 đoạn thẳng được tạo ra sau bước 1 ta sẽ dễ dàng nhận thấy tổng độ dài các đoạn thẳng được tạo ra sau mỗi bước gấp đôi tổng độ dài của các đoạn thẳng trước đó.

Vì vậy nếu đoạn thẳng ban đầu có độ dài là a (cm) ta có :

Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 1 là : 2a (cm)

Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 2 là : $2 \times 2a = 4a = 2^2a$ (cm)

Tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước 3 là : $2 \times 4a = 8a = 2^3a$ (cm)

...

Vậy tổng độ dài các đoạn thẳng ở bước thứ n là : 2^na (cm).

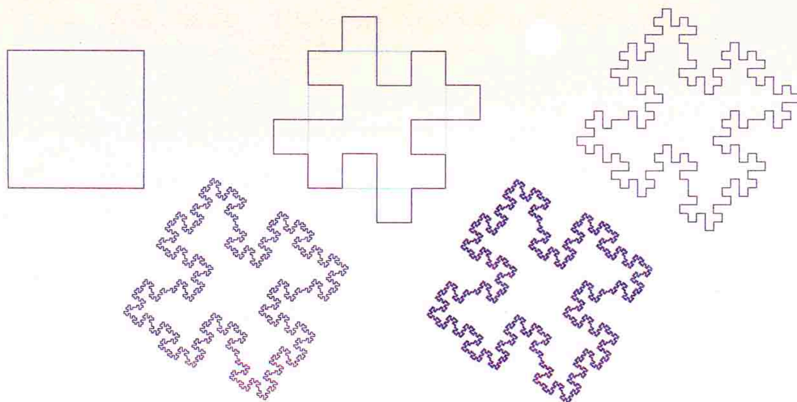
Cũng như đường cong Von Koch, đường cong Minkowski có độ dài vô hạn.



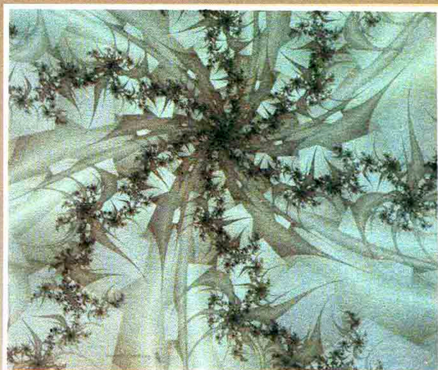


HÒN ĐẢO MINKOWSKI

Bây giờ chúng ta tiến hành xây dựng đường cong Minkowski trên 4 cạnh của một hình vuông ta sẽ được một hình có tên gọi là **hòn đảo Minkowski**.

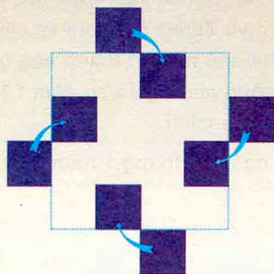


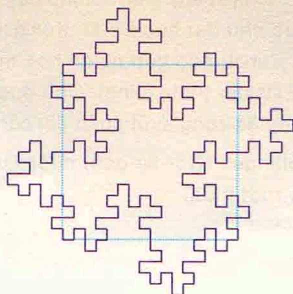


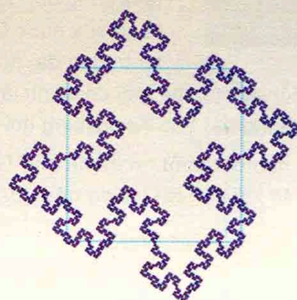


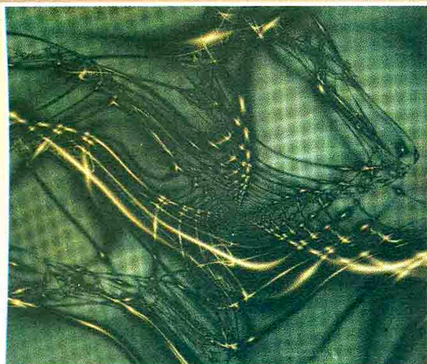
Cũng như bông tuyết Von Koch, hòn đảo Minkowski có chu vi dài vô hạn nhưng khác với bông tuyết Von Koch, hòn đảo Minkowski lại có diện tích không đổi (đúng bằng diện tích hình vuông ban đầu).

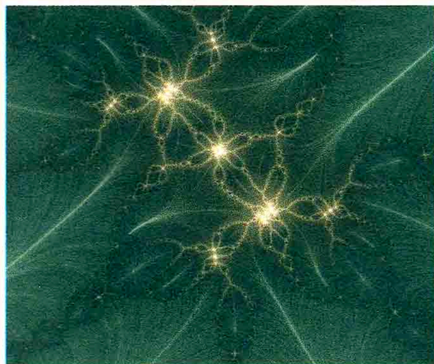
Quan sát hình minh hoạ phía dưới, chúng ta nhận thấy diện tích của hòn đảo Minkowski không thay đổi sau bước 1. Điều này luôn đúng sau mỗi bước biến đổi. Chính vì vậy hòn đảo Minkowski có diện tích không thay đổi.











HÃY LÀM QUEN !

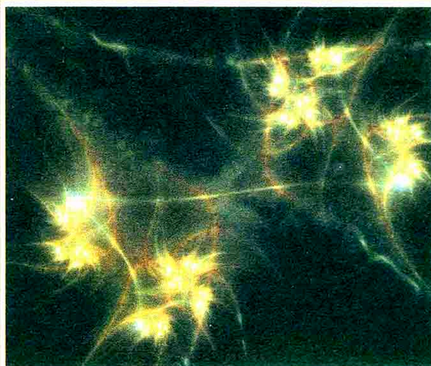


Nhà toán học Hermann Minkowski sinh ngày 22 tháng 6 năm 1864, tại thành phố Alexotas (A-lếch-xô-tat), nước Nga (Nay là Kaunas, nước cộng hoà Lithuania).

Hermann Minkowski theo học tại trường đại học Berlin (Béc-lin) và Konigsberg (Kô-ni-xbớt) nước Đức. Ông nhận được học vị tiến sĩ năm 1885 lúc mới 21 tuổi tại trường đại học Konigsberg. Sau đó ông dạy học tại một số trường đại học nổi tiếng của nước Đức như đại học Bonn, Konigsberg và Zurich (Zu-rich) và chính tại trường đại học Zurich ông gặp người học trò mà sau này trở thành nhà bác học lỗi lạc của thế giới đó chính là Einstein (Anh-xtanh). Ông được công nhận giáo sư năm 1902 tại trường đại học Konigsberg nơi ông đã sống suốt phần đời còn lại của mình.

Ông mất đột ngột tại thành phố Gottingen (Gót-tin-gen) nước Đức ngày 12 tháng 1 năm 1909 ở tuổi 44 khi còn rất trẻ do bệnh đau ruột thừa.



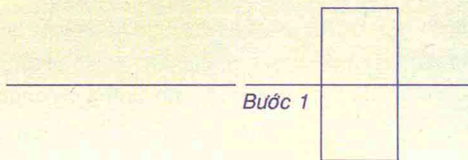


ĐƯỜNG CONG PEANO (PIN-NƠ)

Ta cũng bắt đầu xuất phát với một đoạn thẳng ban đầu.

Bước 1

Chia đoạn thẳng thành 3 phần bằng nhau, về mỗi phía của đoạn thẳng ở giữa dựng 3 cạnh của hình vuông có cạnh đúng bằng đoạn thẳng ở giữa.

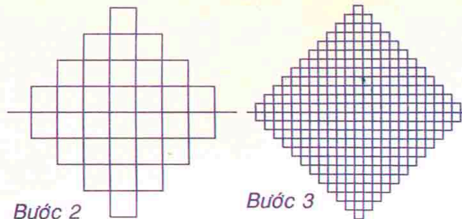


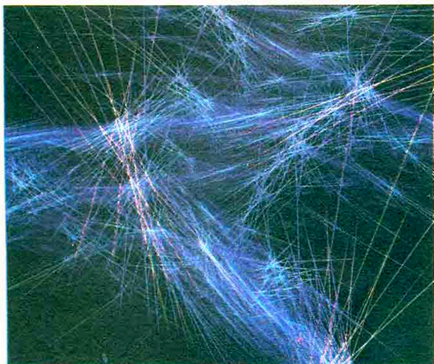
Bước 2

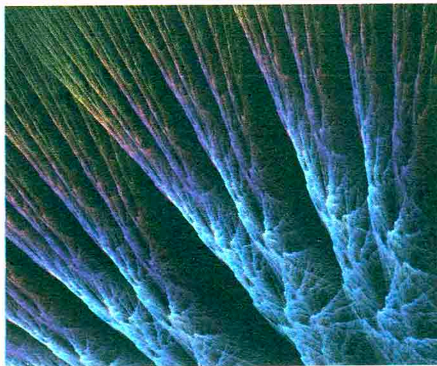
Tiến hành biến đổi như vậy đối với 9 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 1.

Bước 3

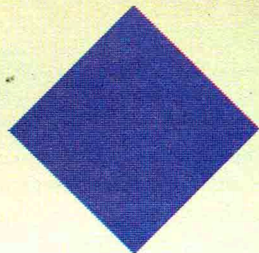
Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 81 đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 2.





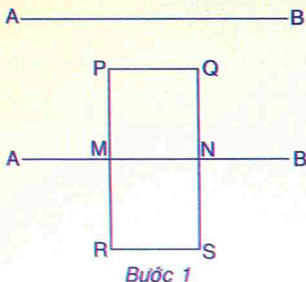


Cứ tiếp tục biến đổi như vậy chúng ta sẽ thu được một đường cong lấp đầy một hình vuông.



Đường cong này được đặt tên là **đường cong Peano** do nhà toán học Giuseppe Peano (Giu-xép-pơ Pin-nơ) người Ý nghĩ ra năm 1890.

Giả sử đoạn thẳng ban đầu là AB. Ta sẽ chứng minh đường cong Peano đi qua mọi điểm của hình vuông có đường chéo AB.



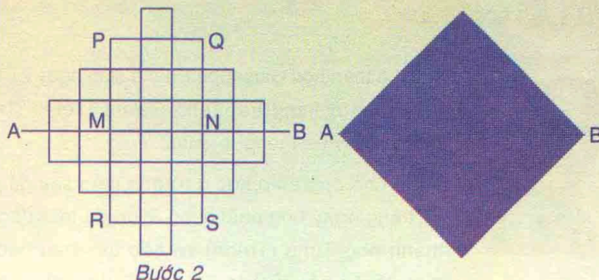
Bước 1

Gọi tên 8 điểm được tạo ra ở bước 1 lần lượt là : A, B, M, N, P, Q, R, S. Ta thấy rằng có nhiều cách để đi từ A đến B qua tất cả các đoạn thẳng được tạo ra, mỗi đoạn thẳng chỉ một lần duy nhất. Ví dụ ta có thể đi theo đường AM-MP-PQ-QN-NS-SR-RM-MN-NB hoặc AM-MN-NQ-QP-PM-MR-RS-SN-NB... Như vậy chỉ bằng một nét vẽ duy nhất ta có thể nối tất cả các điểm được tạo ra ở bước 1.

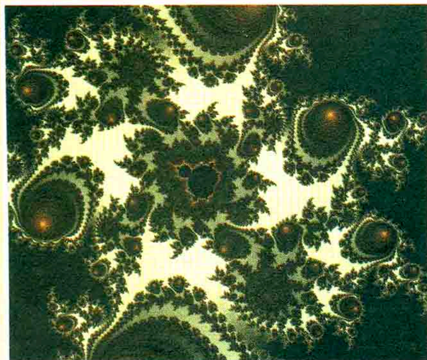


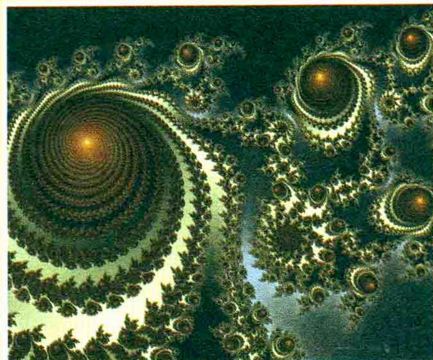


Áp dụng cách nối này cho các đoạn AM, MP, PQ... ở bước 2 ta cũng sẽ đi được từ A đến B qua tất cả các đoạn thẳng được tạo ra, mỗi đoạn một lần duy nhất. Hay nói cách khác đường cong Peano đã đi qua tất cả các điểm được tạo ra ở bước 2. Vậy khi đường cong Peano lấp đầy hình vuông có đường chéo AB thì nó sẽ đi qua tất cả các điểm của hình vuông đó. Hay nói một cách khác ta có thể dùng một nét vẽ duy nhất để nối tất cả các điểm trong một hình vuông. Điều này thật là kì lạ phải không các em ? Khi công bố điều này rất nhiều nhà toán học đã vô cùng ngạc nhiên và nhà toán học Cantor (Can-tơ) đã ngỡ ngàng : "Tôi đã thấy nó nhưng tôi không tin được".

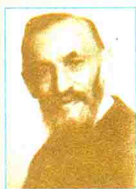


Bước 2





HÃY LÀM QUEN !

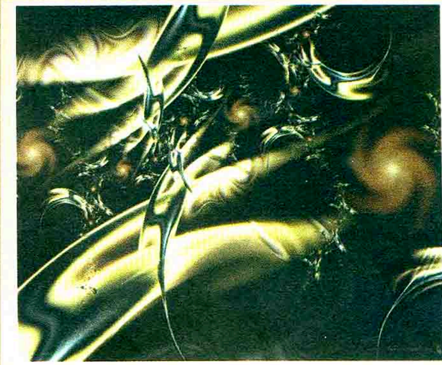


Nhà toán học Giuseppe Peano sinh ngày 27 tháng 8 năm 1858, trong một gia đình nông dân ở trang trại Tetto Galant (Tét-tơ Ga-lan) cách Cuneo 5 km thuộc tỉnh Piemonte (Pi-e-mông-tơ) nước Ý.

Thuở nhỏ ông theo học ở trường làng sau đó chuyển lên học ở Cuneo (Cu-ne-ơ) và hàng ngày ông phải đi bộ 5 km để tới trường. Năm 1870 ông theo anh trai đến thành phố Turin (Tu-rin) và tiếp tục theo học tại đây. Năm 1876 ông thi đỗ và được nhận vào trường đại học Turin, chỉ 4 năm sau ngày 29 tháng 9 năm 1880 ông bảo vệ thành công luận án tiến sĩ toán học. Ông được công nhận giáo sư đại học năm 1884 và trở thành giáo viên của trường đại học Turin. Ông có rất nhiều công trình toán học nổi tiếng, đường cong Peano được ông tìm ra năm 1890.

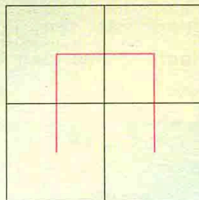
Ông mất ngày 20 tháng 4 năm 1932 tại thành phố Turin nước Ý.

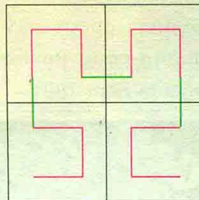




ĐƯỜNG CONG PEANO-HILBERT (PIN-NƠ HIN-BỚT)

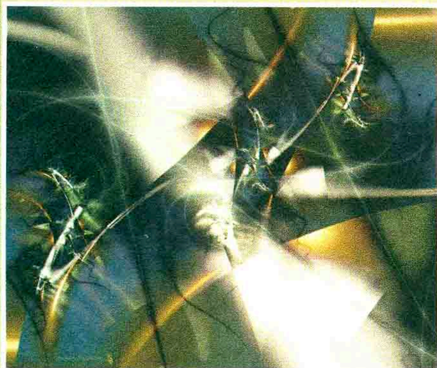
Sau công bố của Peano một năm, năm 1891 Nhà toán học người Đức David Hilbert (Đa-vit Hin-bớt) (1862 - 1942) đã đưa ra một cách khác để xây dựng đường cong Peano. Cách xây dựng của Hilbert tuy phức tạp hơn nhưng phương pháp này lại có ưu điểm là có thể mở rộng trong không gian.





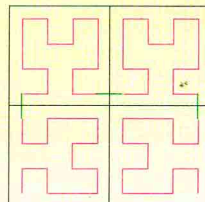
Đầu tiên Hilbert chia hình vuông thành 4 phần bằng nhau và dùng 3 đoạn thẳng nối tâm của 4 hình vuông nhỏ tạo thành hình chữ U ngược.

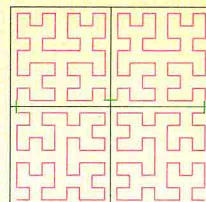
Bước tiếp theo thu hình này với tỉ lệ $^1/_2$ và đặt vào chính giữa hình vuông nhỏ trên cùng bên trái, quay hình này 90^0 theo chiều kim đồng hồ và đặt vào chính giữa hình vuông nhỏ phía dưới. Làm phép đối xứng trục để có các hình ở 2 hình vuông nhỏ phía bên phải. Dùng 3 đoạn thẳng để nối các hình trong 4 hình vuông nhỏ (các đoạn thẳng màu xanh lá cây) ta sẽ thu được một hình có hình dáng ⌐⌐.





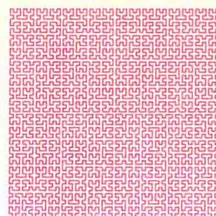
Lại thu hình này với tỉ lệ $^1/_2$ và đặt vào chính giữa hình vuông nhỏ trên cùng bên trái rồi làm tuần tự các bước như trên.

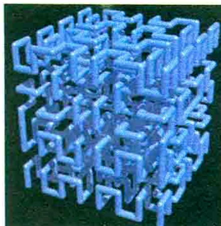


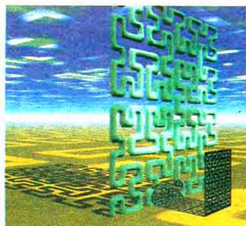


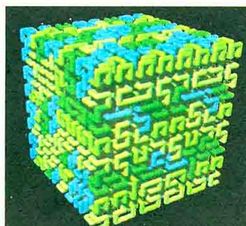
Cứ tiếp tục biến đổi như vậy ta cũng sẽ thu được một đường cong lấp đầy một hình vuông.

Đường cong này được đặt tên là **đường cong Peano-Hilbert** do nhà toán học David Hilbert người Đức nghĩ ra năm 1891.







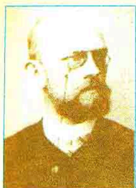


Đường cong Peano-Hilbert mô phỏng trong không gian 3 chiều





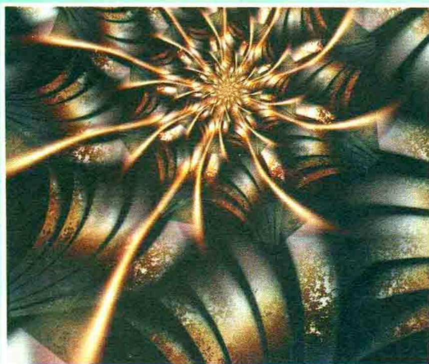
HÃY LÀM QUEN !



Nhà toán học David Hilbert sinh ngày 23 tháng 1 năm 1862, tại thành phố Konigsberg (Kô-ni-xbớt), nước Phổ, nay là Kaliningrad (Ka-li-nin-grat), nước Nga.

Ông theo học tại trường trung học ở thành phố Konigsberg, sau khi tốt nghiệp trung học, ông vào học tại trường Đại học Konigsberg. Tại đây ông nhận được học vị tiến sĩ năm 1885 ở tuổi 23 và ông bắt đầu tham gia giảng dạy tại trường Đại học Konigsberg từ năm 1886 tới năm 1895. Cũng trong thời gian này ông được phong giáo sư năm 1893. Năm 1895 ông trở thành giáo sư toán của trường đại học Gottingen cho đến năm 1902 ông chuyển đến trường Đại học Berlin sau khi đã thuyết phục được người bạn thân của mình là Minkowski dạy thay ông ở đại học Gottingen. Ông nghỉ hưu năm 1930 và được chính quyền thành phố Konigsberg coi như công dân danh dự của thành phố.

Ông mất ngày 14 tháng 2 năm 1943 tại thành phố Gottingen nước Đức.





RỒNG HEIGHWAY (HAI-UÂY)

Chúng ta cũng bắt đầu với một đoạn thẳng.

Bước 1

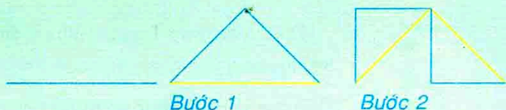
Thay thế đoạn thẳng này bằng hai cạnh của hình vuông nhận đoạn thẳng ban đầu làm đường chéo.

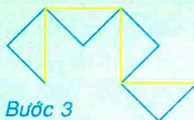
Bước 2

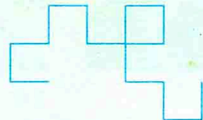
Tiến hành thay thế như vậy đối với hai đoạn thẳng vừa được tạo ra sau bước 1.

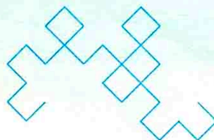
Bước 3

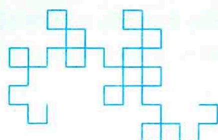
Tiếp tục thay thế như vậy đối với 4 đoạn thẳng được tạo ra sau bước 2.

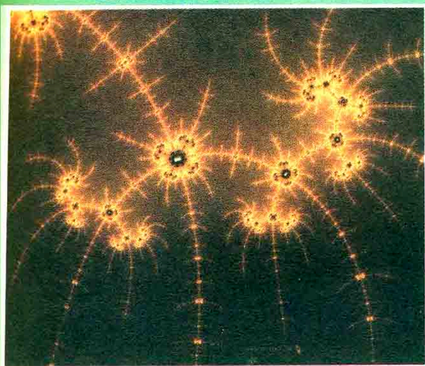






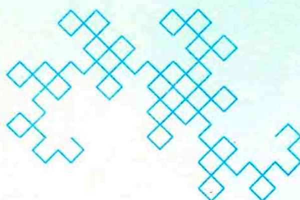


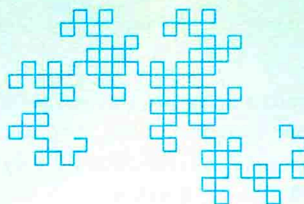






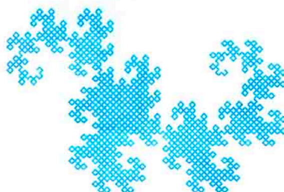
Cứ tiếp tục biến đổi như vậy chúng ta sẽ thu được một hình như sau :



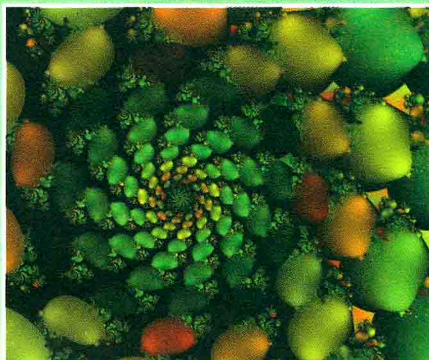


Hình này được đặt tên là **rồng Heighway,** hay còn được gọi là **Jurassic Park Fractal**.

Rồng Heighway lần đầu tiên được nghiên cứu bởi các nhà Vật lí học John Heighway (Giôn Hai-uây), Bruce Banks (Brúc-sơ Ban-cơ) và William Harter (Uy-li-am Ha-tơ).





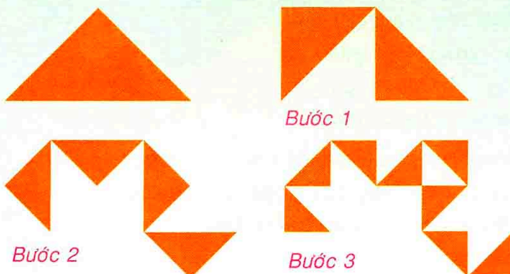


Rồng Heighway còn có thể được tạo ra bằng cách bắt đầu với một tam giác vuông cân (một nửa hình vuông).

Ta biến đổi như sau :

Bước 1

Đầu tiên chia tam giác này thành hai tam giác vuông cân bằng nhau. Giữ nguyên tam giác bên phải đồng thời thay tam giác bên trái bằng tam giác đối xứng với nó qua cạnh huyền.

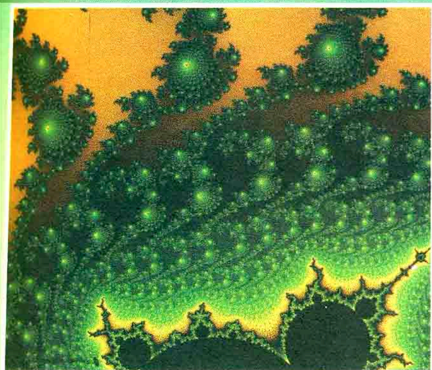


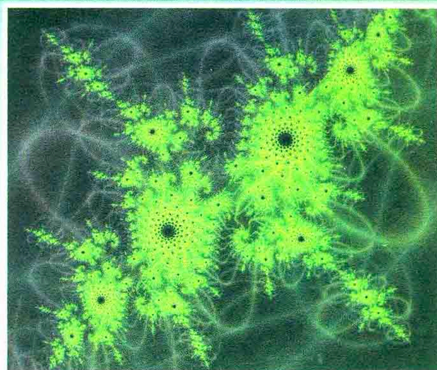
Bước 2

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với hai tam giác vừa được tạo ra sau bước 1.

Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với bốn tam giác vừa được tạo ra sau bước 2.

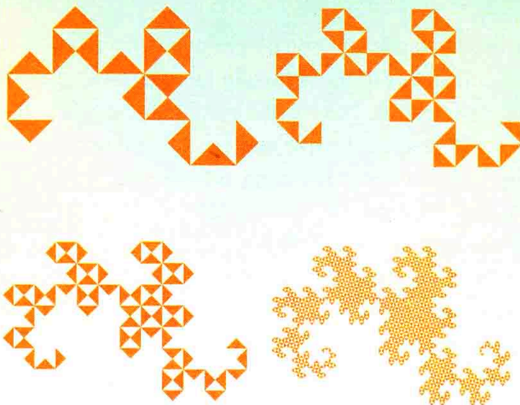


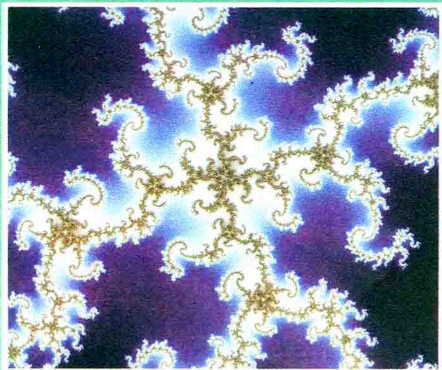


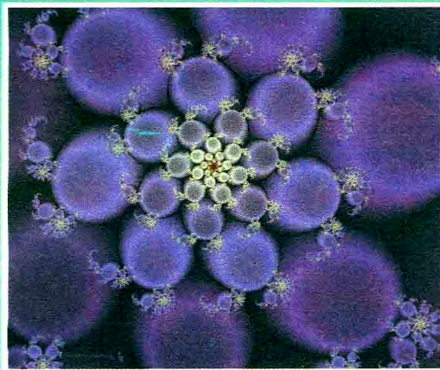
Cứ tiếp tục biến đổi như vậy cuối cùng chúng ta cũng sẽ thu được rồng Heighway.

Nhưng cách mà rồng Heighway được tạo ra lần đầu tiên lại hoàn toàn khác, chỉ bằng cách gập một băng giấy rồi mở băng giấy đó ra chúng ta cũng thu được hình ảnh của rồng Heighway.

Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu cách làm độc đáo này.

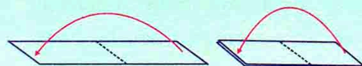


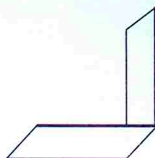




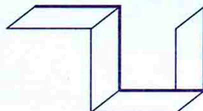
Cách tiến hành như sau :

Để một băng giấy dài trên bàn và gập băng giấy từ phải sang trái sao cho hai đầu mút của băng giấy chạm nhau, sau đó ta lại tiếp tục gập băng giấy vừa tạo thành lần nữa theo cách như vậy (từ phải sang trái sao cho hai đầu mút của băng giấy chạm nhau). Sau ba lần gập các em hãy mở băng giấy ra sao cho các đoạn băng giấy bị gập luôn vuông góc với nhau ta sẽ thu được một hình như minh hoạ bên cạnh. Ta nhận thấy hình này giống hệt với hình nhận được ở bước thứ 3 trong phép biến đổi để có rồng Heighway.

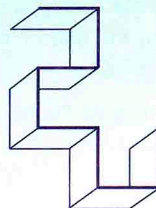




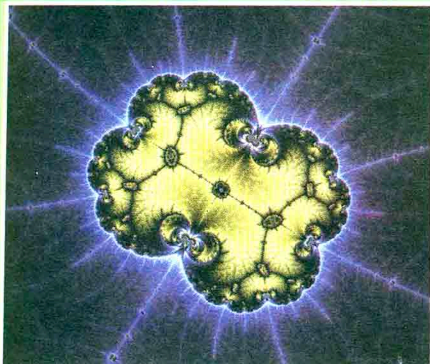
Mở băng giấy sau 1 lần gập

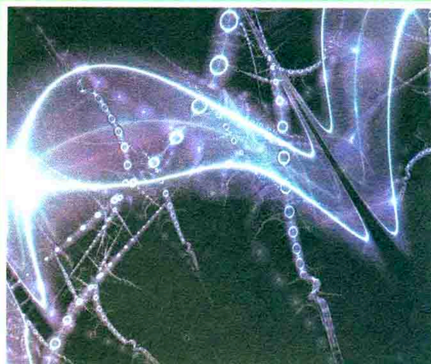


Mở băng giấy sau 2 lần gập

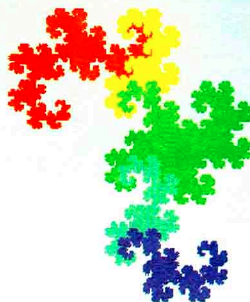


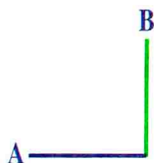
Mở băng giấy sau 3 lần gập





Như vậy bằng cách gập băng giấy một số lần và mở ra ta sẽ có một fractal rồng Heighway bằng giấy. Hình bên cạnh là hình minh hoạ rồng Heighway sau khoảng 50 lần gập giấy, nhưng trong thực tế chúng ta không thể làm bằng tay sau 8 lần gập (dù băng giấy có mỏng và dài bao nhiêu). Nhưng điều này lại thật đơn giản đối với một máy tính. Chúng ta sẽ tìm hiểu quy luật hình thành của rồng Heighway trên máy tính.

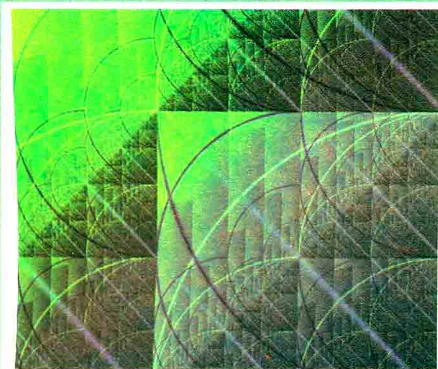


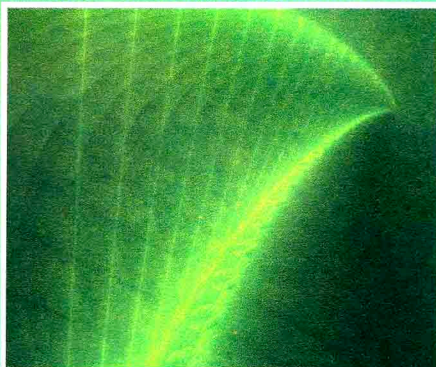


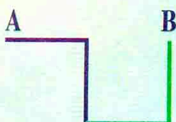
Đây là hình chúng ta thu được khi gập băng giấy một lần và mở ra. Hãy tưởng tượng cả băng giấy là một con đường và chúng ta phải đi dọc con đường này theo chiều từ B đến A. Sau lần gập thứ nhất để đi được từ B đến A ta chỉ cần một lần rẽ phải (kí hiệu là P) ở giữa đường.

Ta ghi lại hành trình này vào một bảng như hình bên :

MỘT LẦN GẬP
P



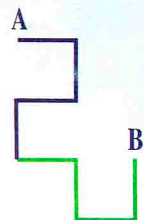




Tiếp tục hành trình như vậy trên đoạn đường được tạo ra sau hai lần gập. Ta thấy nửa quãng đường đầu (đoạn màu xanh lá cây) giống hệt với đoạn đường được tạo ra sau lần gập đầu tiên và tại đây tiếp tục rẽ phải để đi nốt nửa cuối của đoạn đường. Vậy để đi hết đoạn đường này ta sẽ đi như sau : Đầu tiên ta rẽ phải (P), sau đó rẽ phải tiếp (P) và cuối cùng là rẽ trái (kí hiệu là T). Ta cũng ghi lại hành trình này vào bảng.

HAI LẦN GẬP

P	P	T



Tương tự với đoạn đường được tạo ra sau ba lần gập ta cũng thấy nửa quãng đường đầu (đoạn màu xanh lá cây) giống hệt với đoạn đường được tạo ra sau hai lần gập và tiếp tục rẽ phải để đi nốt nửa cuối của đoạn đường.

Ta cũng dễ dàng ghi lại được hành trình của đoạn này như sau :

BA LẦN GẬP

P	P	T	P	P	T	T





Bây giờ chúng ta hãy quan sát các bảng sau 3 lần gập sẽ thấy các bảng này được hình thành theo quy luật như sau :

MỘT LẦN GẬP

P

HAI LẦN GẬP

P	P	T

- Ô ở chính giữa bao giờ cũng là P.
- Các ô bên trái ô giữa chính là các ô của lần gập ngay trước đó.
- Các ô bên phải ô giữa lần lượt có hướng rẽ ngược lại hướng của ô đối xứng với nó qua ô ở giữa.

BA LẦN GẬP

			P			

BA LẦN GẬP

P	P	T	P			

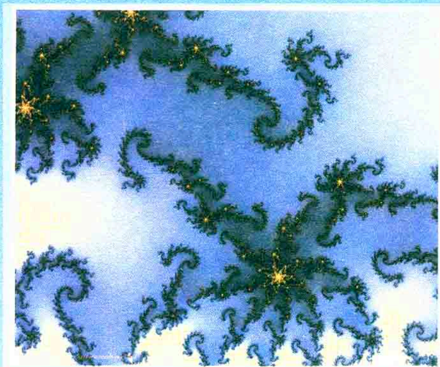
BA LẦN GẬP

P	P	T	P	P	T	T

Đến đây chắc các em có thể tự ghi lại hành trình của đoạn đường sau 4 lần gập, 5 lần gập... mà không cần nhìn vào hình vẽ và nếu như có bảng hành trình các em sẽ xây dựng được rồng Heighway một cách khá đơn giản.

Các em có thể tham khảo chương trình tạo ra rồng Heighway ở trang web : ***http://math.rice.edu***

BỐN LẦN GẬP



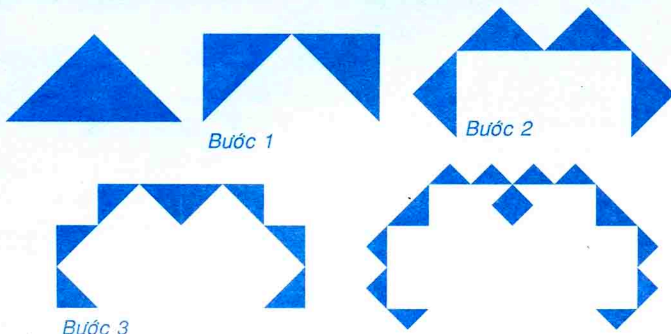


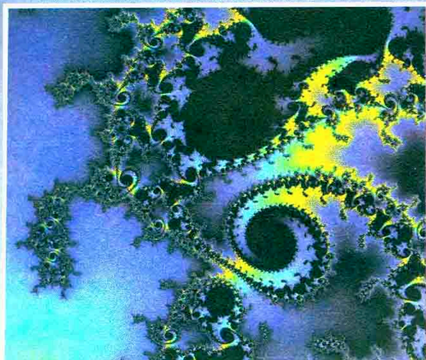
RỒNG LÉVY (LỀ-VI)

Quay trở lại với cách biến đổi rồng Heighway bằng tam giác vuông cân nhưng thay đổi cách thức biến đổi như sau :

Bước 1

Đầu tiên ta cũng chia tam giác ban đầu thành hai tam giác vuông cân bằng nhau thay cả hai tam giác này bằng hai tam giác mới đối xứng với chúng qua cạnh huyền.

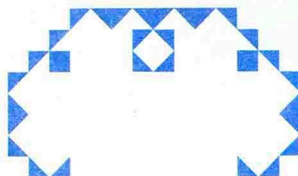


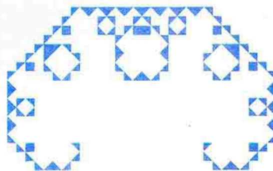




Bước 2

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với hai tam giác vừa được tạo ra sau bước 1.

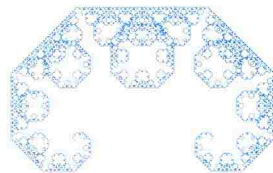




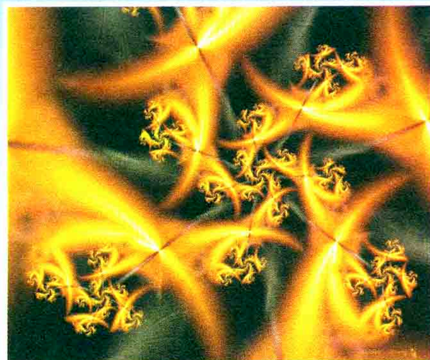
Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với bốn tam giác vừa được tạo ra sau bước 2.

Cứ tiếp tục biến đổi như vậy cuối cùng chúng ta sẽ thu được một hình khác hẳn rồng Heighway. Hình này được đặt tên là **rồng Lévy** do nhà Toán học Paul Lévy (Pôn Lê-vi) người Pháp tìm ra.







HÃY LÀM QUEN !

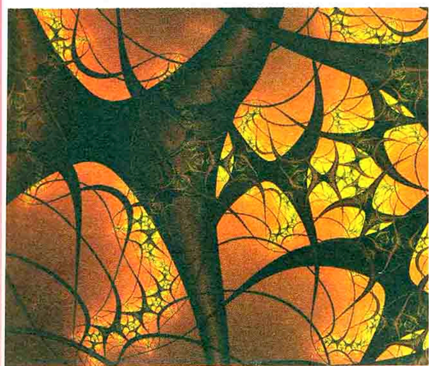


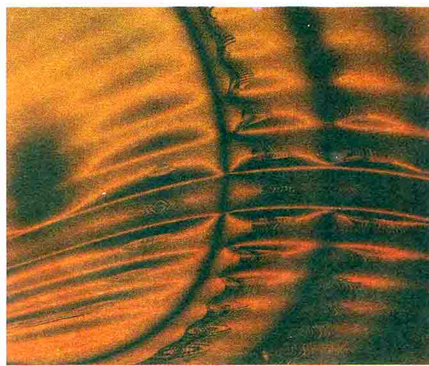
Nhà toán học Paul Lévy (Pôn Lê-vi) sinh ngày 15 tháng 8 năm 1886 tại Thành phố Paris (Pa-ri) nước Pháp trong một gia đình có truyền thống về toán học.

Ông theo học tại trường École Polytechnique (Ê-côn Pô-li-téc-nic). Ở trường ông luôn là một học sinh xuất sắc, đạt nhiều giải thưởng với các môn học đặc biệt là các môn Toán, Lí, Hoá. Ông có những công trình đầu tiên khi mới 19 tuổi. Sau khi tốt nghiệp tại đây ông phục vụ trong quân đội một số năm. Suốt thế chiến thứ nhất ông phục vụ trong một đơn vị pháo binh, sau đó trở về dạy học tại trường École des Mines (Ê-côn đê Min). Ông nhận được học vị tiến sĩ khoa học năm 1912 khi mới 26 tuổi.

Năm 1913 ông trở thành giáo sư tại trường École Nationale des Mines. Năm 1920 ông được phong giáo sư Vật lí tại trường École Polytechnique và làm việc tại đây đến năm 1959.Trong khoảng thời gian từ năm 1905 đến 1971 ông đã xuất bản 10 cuốn sách và viết hơn 270 bài báo khoa học.

Ông mất ngày 15 tháng 12 năm 1971.



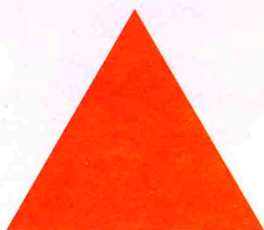


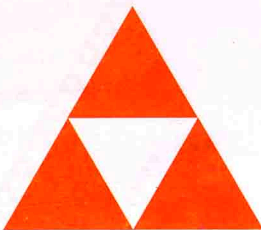
TAM GIÁC SIERPINSKI (XI-Ơ-PIN-XKI)

Đây là một trong những fractal nổi tiếng nhất của hình học fractal. Chúng ta bắt đầu với một tam giác đều và biến đổi nó như sau :

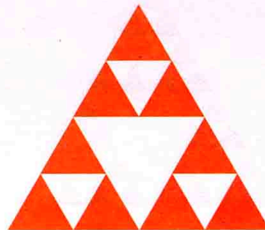
Bước 1

Đầu tiên ta chia tam giác đều ban đầu thành 4 tam giác đều nhỏ bằng nhau và bỏ đi tam giác ở giữa.



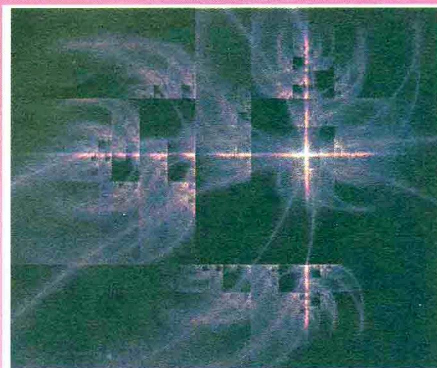


Bước 1



Bước 2





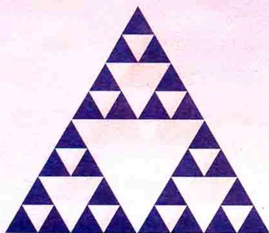
Bước 2

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 3 tam giác vừa được tạo ra sau bước 1.

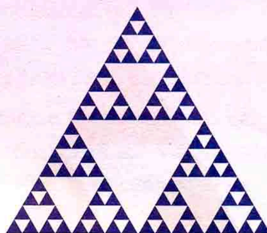
Bước 3

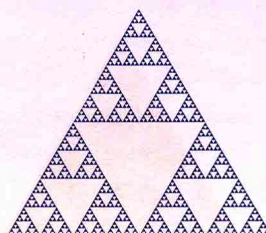
Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 9 tam giác vừa được tạo ra sau bước 2.

Cứ tiếp tục biến đổi mãi như vậy cuối cùng chúng ta thu được một hình gọi là **tam giác Sierpinski** hay **sàng Sierpinski**.

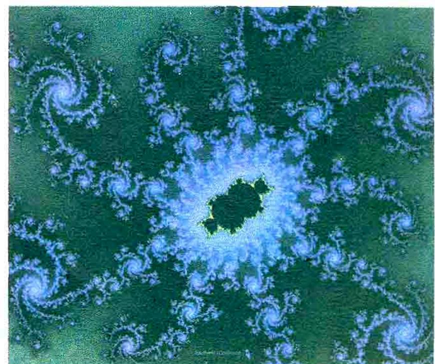


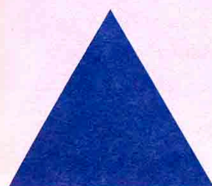
Bước 3

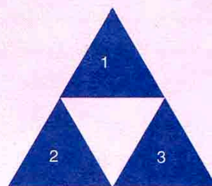




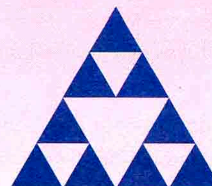




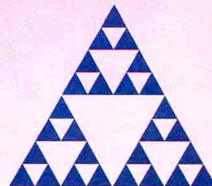




Bước 1



Bước 2



Bước 3

Bây giờ chúng ta sẽ tính số lượng các tam giác được tạo ra sau mỗi bước biến đổi. Nhìn vào hình vẽ trên ta dễ dàng nhận thấy :

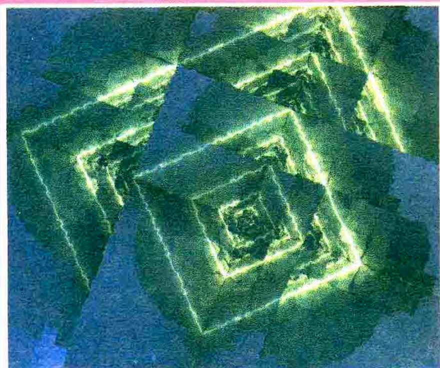
Ở bước 1 tổng số tam giác được tạo ra là : 3

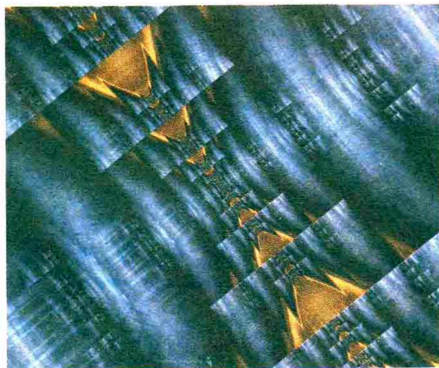
Ở bước 2 tổng số tam giác được tạo ra là : $3 \times 3 = 9 = 3^2$

Ở bước 3 tổng số tam giác được tạo ra là : $3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

...

Vậy ở bước thứ n tổng số tam giác được tạo ra là : 3^n





Còn diện tích tam giác Sierpinski thì sao ? Chúng ta sẽ tính diện tích của tam giác Sierpinski ở bước thứ n.

Dễ thấy rằng sau bước biến đổi thứ nhất diện tích của tam giác ban đầu giảm đi $^1/_4$ và như vậy sau mỗi bước biến đổi diện tích của tam giác Sierpinski sẽ bằng $^3/_4$ diện tích tam giác Sierpinski ở bước trước đó.

Giả sử diện tích tam giác Sierpinski ban đầu là S (cm^2), ta có :

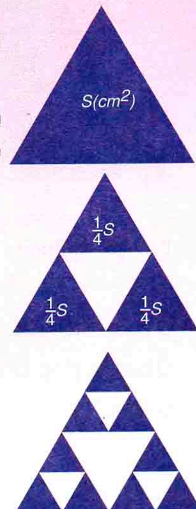
Diện tích tam giác Sierpinski ở bước 1 là : $\frac{3}{4}S$ (cm^2)

Diện tích tam giác Sierpinski ở bước 2 là : $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}S = (\frac{3}{4})^2S$ (cm^2)

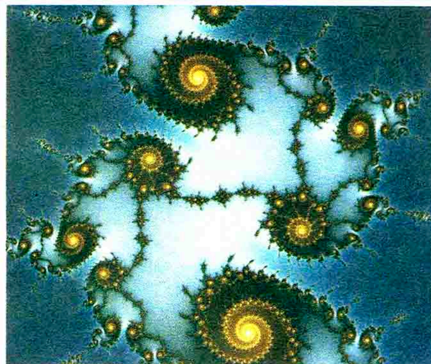
Diện tích tam giác Sierpinski ở bước 3 là : $\frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^2S = (\frac{3}{4})^3S$ (cm^2)

...

Vậy diện tích tam giác Sierpinski ở bước thứ n là : $(\frac{3}{4})^nS$ (cm^2).



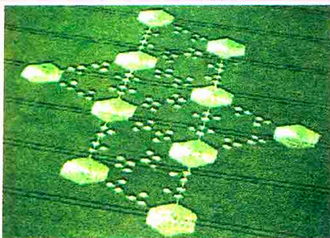




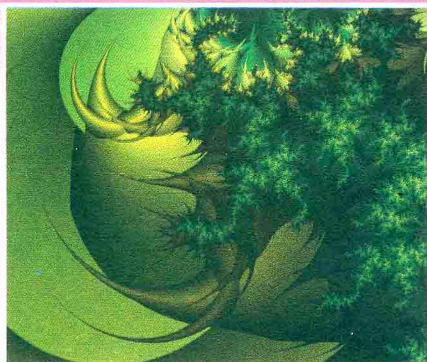
Ta nhận thấy cứ sau mỗi bước biến đổi diện tích tam giác Sierpinski sẽ nhỏ hơn diện tích trước đó vì vậy diện tích tam giác Sierpinski sẽ nhỏ vô hạn.

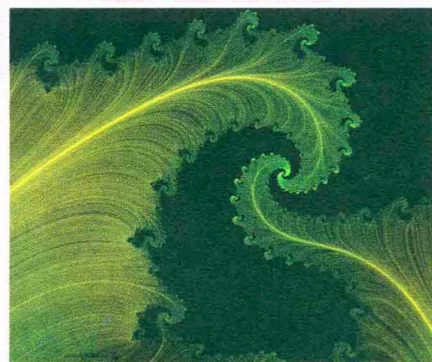


Ở phần đầu chúng ta đã thấy đường cong Von Koch và đường cong Minkowski được xây dựng từ một đoạn thẳng ban đầu nhưng lại có độ dài vô hạn hay bông tuyết Von Koch có chu vi dài vô hạn nhưng diện tích lại hữu hạn còn hòn đảo Minkowski cũng có chu vi vô hạn nhưng diện tích lại không đổi. Bây giờ chúng ta lại thấy một tam giác Sierpinski được xây dựng từ một tam giác đều ban đầu nhưng lại có diện tích nhỏ vô hạn.



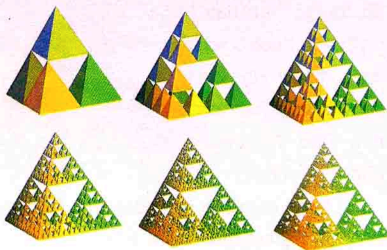
Bóng dáng tam giác Sierpinski xuất hiện cùng với những vòng tròn bí ẩn trên cánh đồng



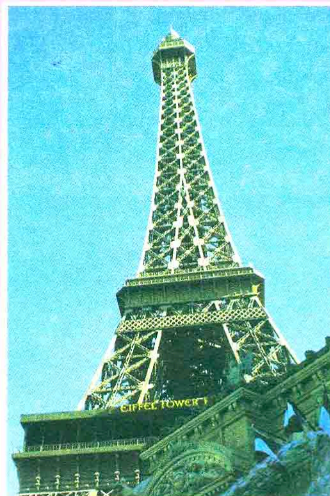


Trong thiên nhiên chúng ta có thể tìm thấy bóng dáng của tam giác Sierpinski trên vỏ một số loài ốc, lá cây dương xỉ,... còn nếu phát triển trong không gian thì tam giác Sierpinski chính là mô hình của các công trình đồ sộ nhưng lại chiếm một thể tích không đáng kể.

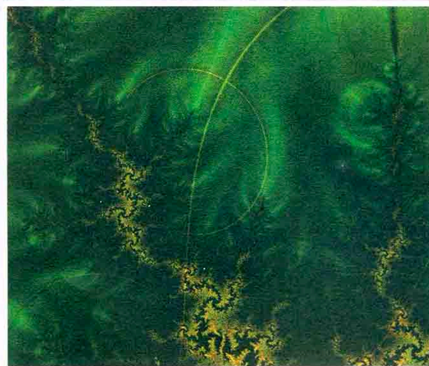
Tháp Eiffel (Ép-phen) nổi tiếng của Pháp được xây dựng trước khi tam giác Sierpinski ra đời nhưng ý tưởng của nó lại rất gần với tam giác Sierpinski. Tháp cũng bao gồm các kết cấu hình tam giác rất vững chắc.



Mô hình tam giác Sierpinski trong không gian







Chúng ta cũng có thể xây dựng được **tam giác Sierpinski** từ chính **tam giác Pascal** (Pa-xcan) trong hình học Euclid.



Các em hãy quan sát hình bên và tìm ra quy luật của các con số trong những tam giác nhỏ màu xanh lá cây và điền vào những tam giác còn trống.



Nếu như các em tìm ra quy luật của những con số và điền đúng thì các em sẽ có một tam giác số đầy đủ như hình vẽ bên trái.

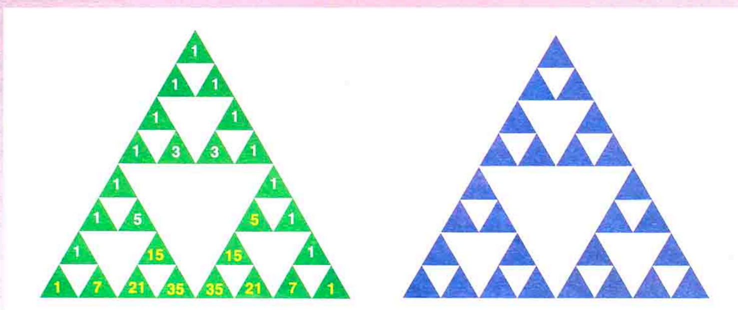
Tam giác số này chính là **tam giác Pascal** nổi tiếng do nhà toán học người Pháp Blaise Pascal (Bơ-lai-xơ Pa-xcan) tìm ra.

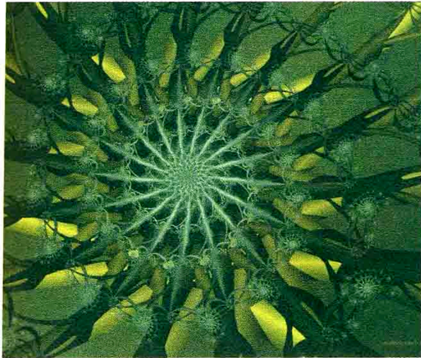


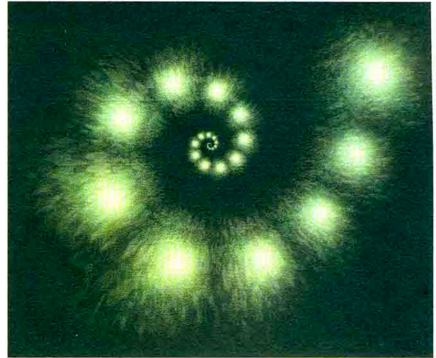


Từ tam giác Pascal các em hãy hình dung xem làm thế nào để có thể biến tam giác này trở thành tam giác Sierpinski ?

Điều này thật đơn giản, chỉ cần xoá đi các tam giác nhỏ mang số chẵn chúng ta sẽ có ngay tam giác Sierpinski.







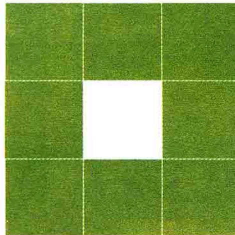
TẤM THẢM SIERPINSKI

Cũng bằng phương pháp cắt bỏ một phần của hình ban đầu, chúng ta bắt đầu với một hình vuông và biến đổi nó như sau :

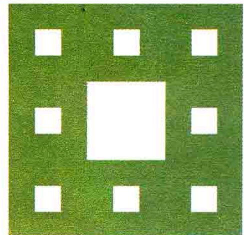
Bước 1

Đầu tiên ta chia hình vuông ban đầu thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau và bỏ đi hình vuông ở giữa.





Bước 1



Bước 2



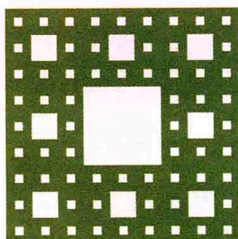


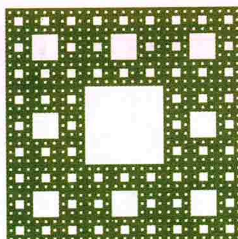
Bước 2

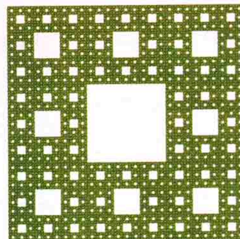
Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 8 hình vuông vừa được tạo ra sau bước 1.

Bước 3

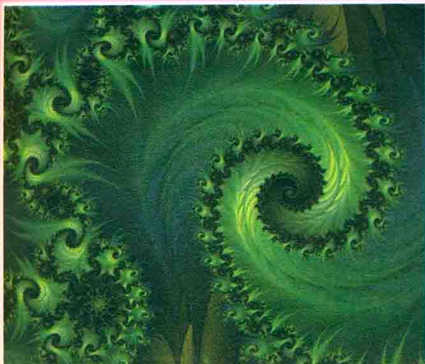
Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 64 hình vuông vừa được tạo ra sau bước 2.

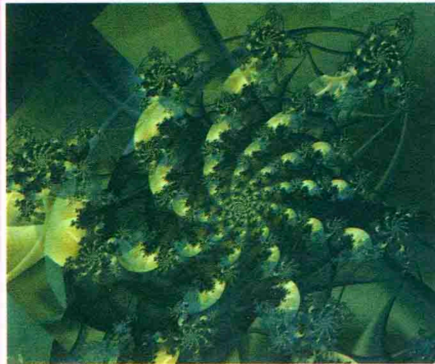




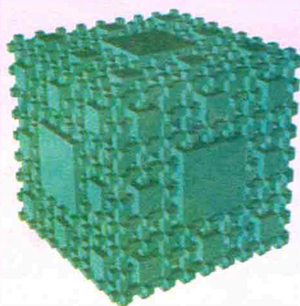


Cứ tiếp tục biến đổi mãi như vậy cuối cùng chúng ta thu được một hình gọi là **tấm thảm Sierpinski** hình vuông. Cũng giống như tam giác Sierpinski, tấm thảm Sierpinski cũng có diện tích nhỏ vô hạn.

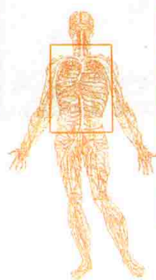


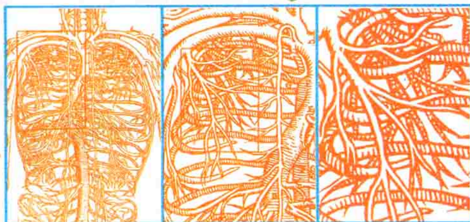


Phát triển tấm thảm Sierpinski ra không gian ta sẽ thu được một khối đa diện có diện tích bề mặt lớn vô hạn nhưng lại chỉ chiếm một thể tích vô cùng nhỏ. Đây cũng là cách mà tạo hoá đã tạo ra những tổ chức có cấu trúc rất đặc biệt như buồng phổi, hệ thống mạch máu...

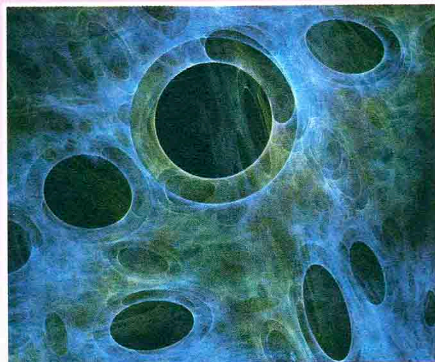


Các mạch máu trong cơ thể chúng ta được chia nhỏ và phân nhánh từ các mạch chủ đến các mao mạch, các mao mạch này nhỏ đến mức các tế bào máu khi di chuyển phải xếp theo hàng một. Tổng chiều dài cũng như diện tích bề mặt của các mạch máu là vô cùng lớn nhưng chúng lại chiếm một thể tích rất khiêm tốn (khoảng 5% thể tích của cơ thể).



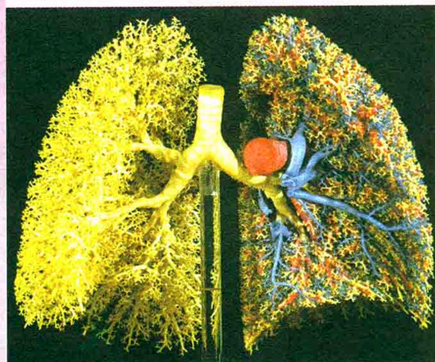


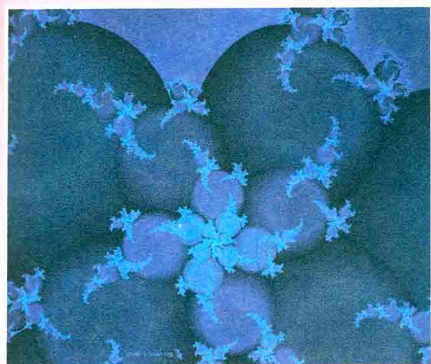


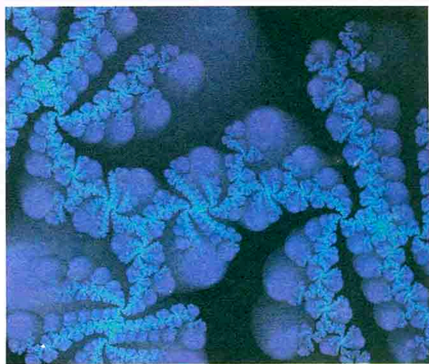


Những cấu trúc tinh vi như vậy không phải là duy nhất trong cơ thể chúng ta, lá phổi chẳng hạn, lá phổi của chúng ta có khoảng 300 triệu phế nang dùng để trao đổi không khí với hệ thống mao mạch. Các phế nang này chiếm một diện tích vô cùng lớn (khoảng trên $100m^2$) nhưng lại nằm gọn trong thể tích của lá phổi.

Những ví dụ này giúp ta hiểu được nguyên lí tiết kiệm nhưng rất hiệu quả của tự nhiên, tuy chỉ chiếm một thể tích rất khiêm tốn nhưng lại có diện tích trao đổi vô cùng lớn.





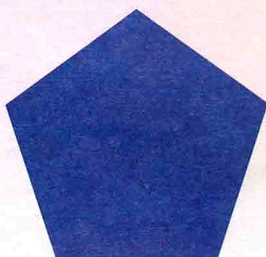


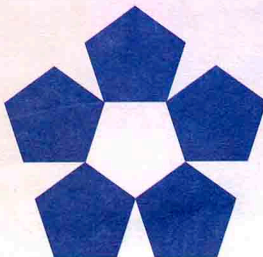
NGŨ GIÁC SIERPINSKI

Chúng ta bắt đầu với một hình ngũ giác đều và biến đổi nó như sau :

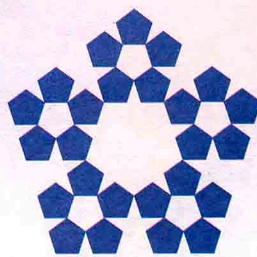
Bước 1

Thay hình ngũ giác ban đầu bằng 5 hình ngũ giác nhỏ đặt ở 5 góc.

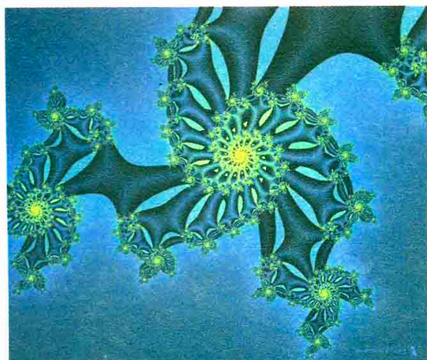


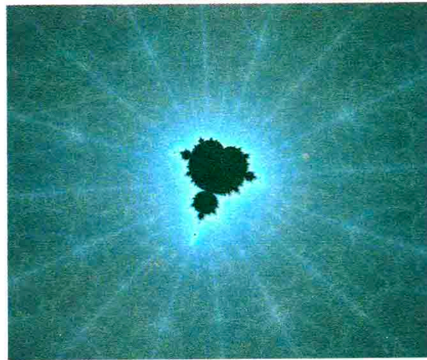


Bước 1



Bước 2





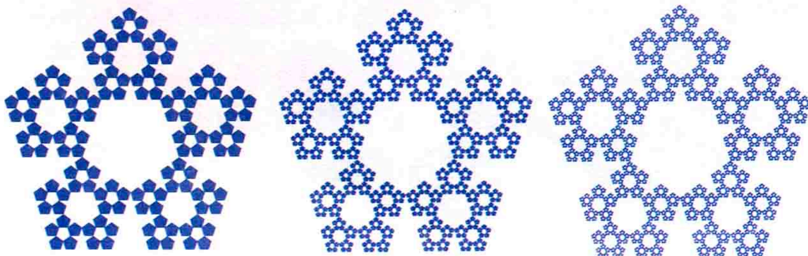
Bước 2

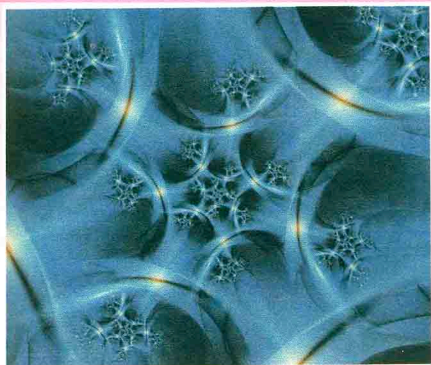
Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 5 hình ngũ giác vừa được tạo ra sau bước 1.

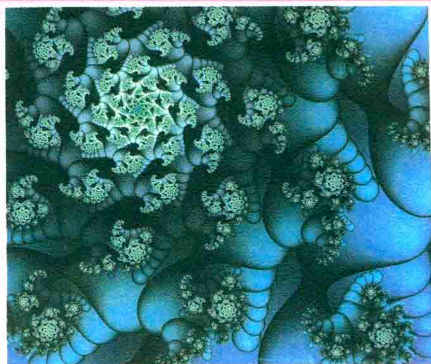
Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 25 hình ngũ giác vừa được tạo ra sau bước 2.

Cứ tiếp tục biến đổi mãi như vậy cuối cùng chúng ta sẽ thu được một **ngũ giác Sierpinski**.

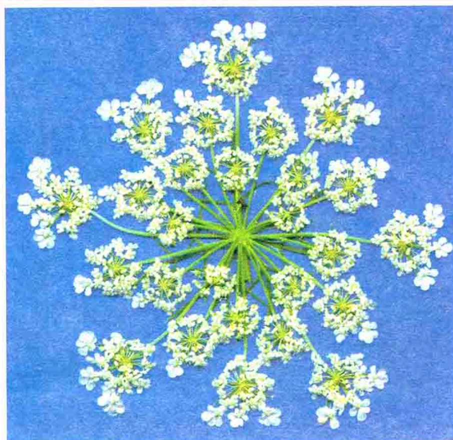


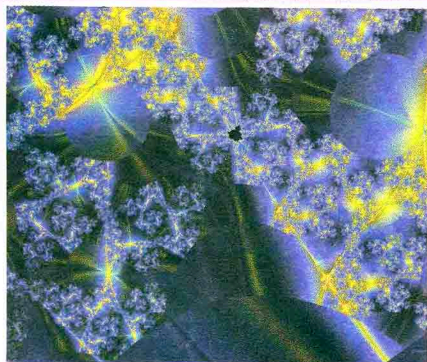


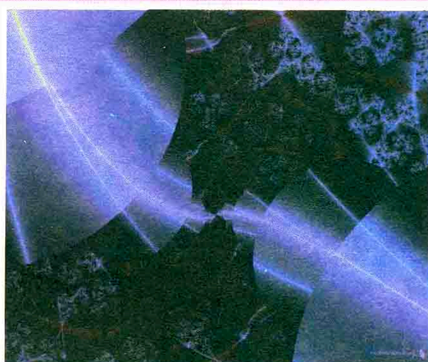


Trong tự nhiên có rất nhiều loài cây, hoa hay những vật mang bóng dáng fractal Sierpinski

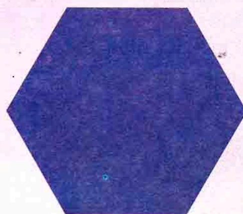


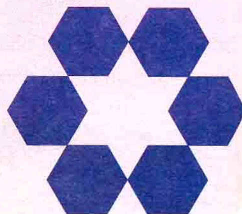




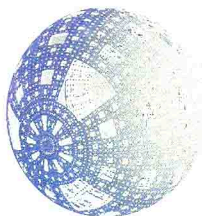


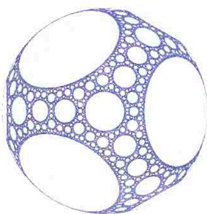
Như vậy với việc thay hình ban đầu là một đa giác đều : ngũ giác đều, lục giác đều... thì cuối cùng chúng ta sẽ thu được ngũ giác Sierpinski, lục giác Sierpinski,...



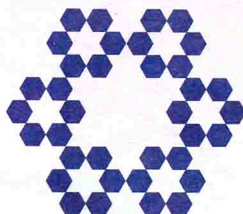


Bước 1

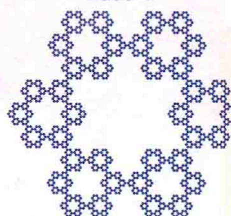




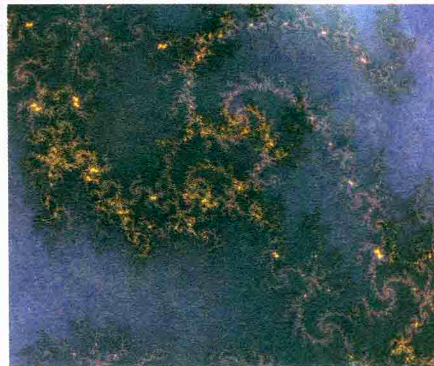
Các fractal Sierpinski xây dựng trên hình cầu



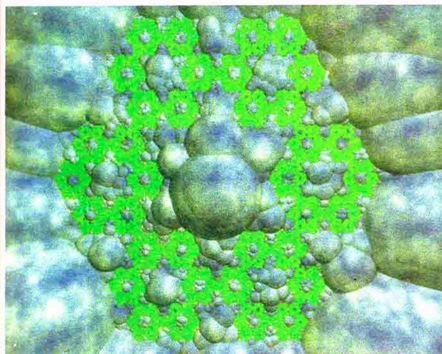
Bước 2

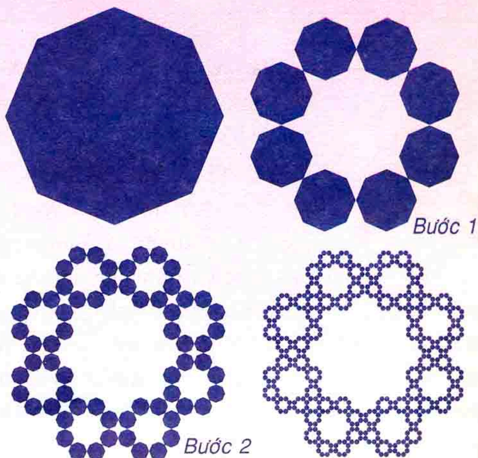




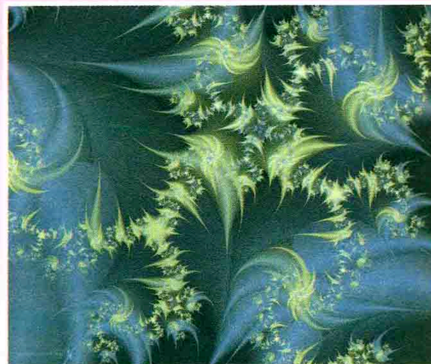


Hình minh hoạ dưới đây miêu tả cách xây dựng tấm đệm Sierpinski bát giác.









HÃY LÀM QUEN !

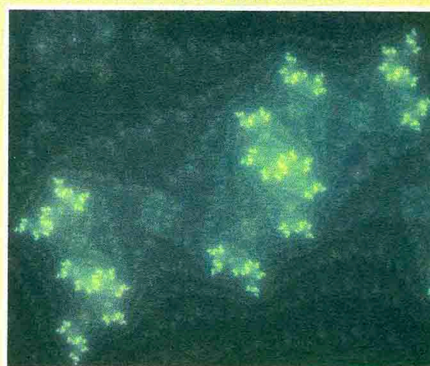


Waclaw Sierpinski (Uắc-lo Xi-ơ-pin-xki) sinh ngày 14 tháng 3 năm 1882 tại thủ đô Vacsava (Vác-sa-va), Ba Lan. Ngay từ thời thơ ấu những khả năng toán học của ông đã thể hiện rất rõ. Năm 1900 ông nhập học tại trường đại học Vacsava. Ông đã tốt nghiệp 4 năm sau đó và nhận được huy chương vàng môn Toán học.

Từ năm 1908 đến 1914 Waclaw Sierpinski giảng dạy tại trường đại học Lvov (Lơ-vốp), sau đó 3 năm ông đến giảng dạy tại trường đại học Moscow (Mát-xcơ-va). Khi chiến tranh thế giới thứ nhất kết thúc ông trở lại trường đại học Vacsava và dành hầu hết sự nghiệp của mình tại đây. Theo những ghi nhận thì Sierpinski là người thầy xuất sắc và rất khó tính. Ông đã nhận được những học vị tiến sĩ từ 10 trường đại học khác nhau và được bầu chọn làm phó viện trưởng học viện khoa học của Ba Lan. Ông nhận được giải thưởng khoa học lớn nhất vào năm 1949.

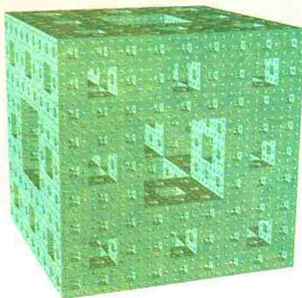
Ông mất ngày 14 tháng 5 năm 1969 tại Vacsava.

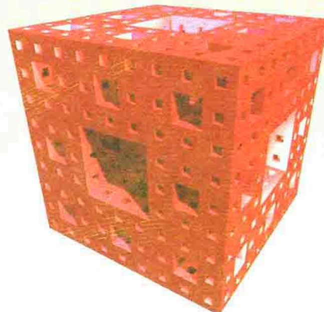




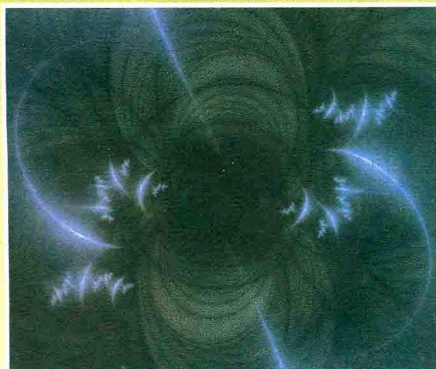
BỌT BIỂN MENGER (MEN-GƠ)

Bọt biển Menger chính là tấm thảm Sierpinski mở rộng ra không gian.





Ta lấy hình ban đầu là một hình lập phương. Trên mỗi mặt của hình lập phương ta tiến hành xây dựng tấm thảm Sierpinski nhưng mỗi khi xoá một hình vuông trên tấm thảm Sierpinski thì đục trong lập phương cả một hình hộp có đáy là hai hình vuông tương ứng trên hai mặ˙ đối diện của hình hộp.

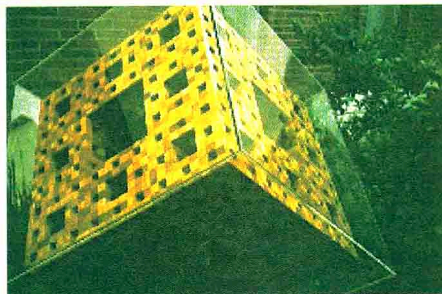




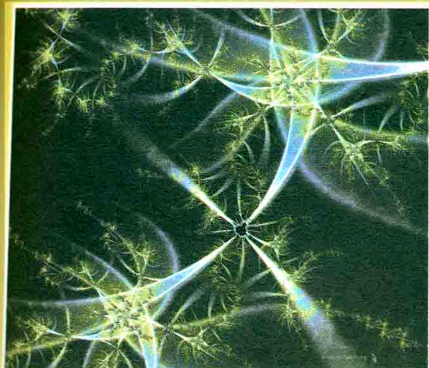
Bọt biển Menger do Karl Menger (Các Men-gơ) người Áo đưa ra năm 1917.

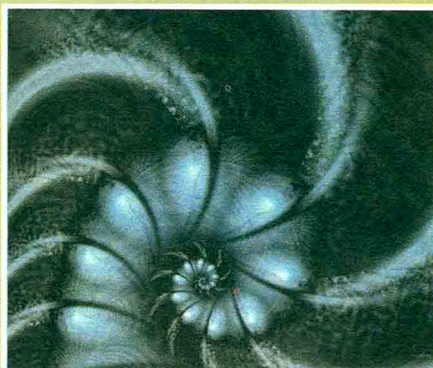
Từ "bọt biển Menger" các kiến trúc sư đã nảy sinh rất nhiều ý tưởng sáng tạo trong công tác thiết kế xây dựng các cao ốc hiện đại mà vẫn đảm bảo sự thông thoáng đồng thời tạo ra nhiều khoảng không gian nhưng lại tiết kiệm diện tích một cách tối đa.





Bọt biển Menger được xây dựng bằng gỗ





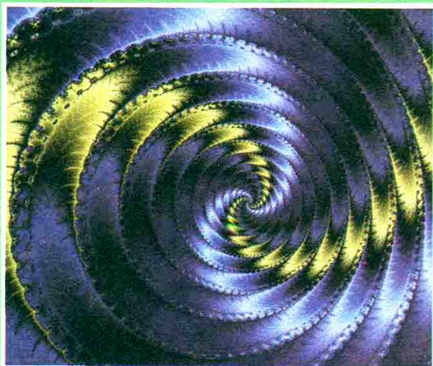
HÃY LÀM QUEN !



Karl Menger sinh ngày 13 tháng 1 năm 1902 tại thành phố Vienna (Viên) nước Áo. Năm 1920 ông theo học ngành Vật lí tại đại học Vienna. Ông nhận được học vị tiến sĩ năm 1924. Năm 1925 ông được mời đến giảng dạy tại trường đại học Amsterdam (Am-xtec-đam) và làm việc ở đây trong 2 năm đến năm 1927 ông quay trở lại đại học Vienna. Năm 1938 vì những lí do chính trị ông chuyển đến Mĩ và dạy học tại trường đại học Notre Dame (No-trơ Đam).

Năm 1948 ông đến giảng dạy tại trường Illinois Institute of Technology (I-li-noi In-sti-tiu Téc-nô-lô-gy) và ở lại Chicago (Chi-ca-gô) sống suốt phần đời còn lại ở đó.

Ông mất ngày 5 tháng 10 năm 1985 tại Chicago, bang Illinois, nước Mỹ.





ĐÁM BỤI CANTOR (CAN-TƠ)



Cách xây dựng đám bụi Cantor cũng tương tự như việc xây dựng tam giác Sierpinski trong mặt phẳng. Chúng ta bắt đầu với một đoạn thẳng và biến đổi nó như sau :

Chia đoạn thẳng thành 3 phần bằng nhau rồi bỏ đi một đoạn ở chính giữa.

Lặp lại cách biến đổi như vậy đối với hai đoạn thẳng còn lại. Cứ tiếp tục biến đổi như vậy cuối cùng chúng ta sẽ thu được một tập hợp toàn những hạt bụi. Tập hợp này được gọi là **đám bụi Cantor** do nhà toán học Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Gioóc-giơ Phéc-đi-năng Lút-vich Phi-líp Can-tơ) xây dựng. Điều kì lạ mà chúng ta dễ dàng nhận thấy đó là đám bụi này có tổng chiều dài nhỏ vô hạn nhưng lại bao gồm vô số các điểm mà chúng ta không thể đếm nổi.





TẬP CANTOR TRONG MẶT PHẲNG

Để xây dựng tập cantor trong mặt phẳng chúng ta bắt đầu với một hình vuông và biến đổi nó như sau :

Bước 1

Đầu tiên ta chia hình vuông thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau sau đó xoá đi 5 hình, chỉ để lại 4 hình vuông ở 4 góc.



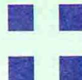




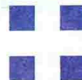


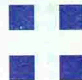


Bước 1

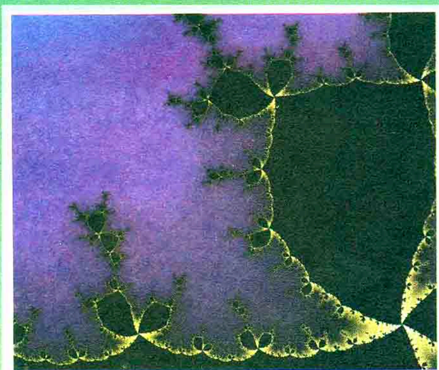








Bước 2





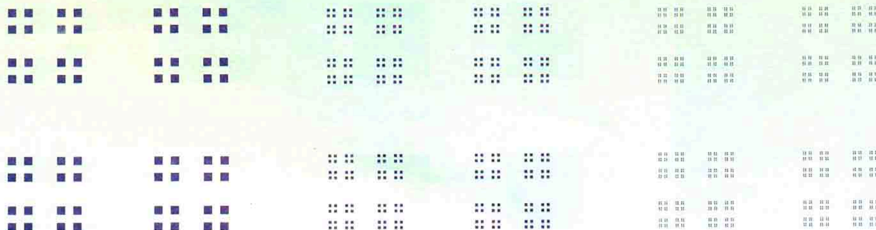
Bước 2

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 4 hình vuông vừa được tạo ra sau bước 1.

Bước 3

Tiếp tục biến đổi như vậy đối với 16 hình vuông vừa được tạo ra sau bước 2.

Cứ tiếp tục biến đổi mãi như vậy cuối cùng chúng ta cũng sẽ thu được một tập hợp toàn những hạt bụi. Đây chính là tập Cantor xây dựng trên mặt phẳng.



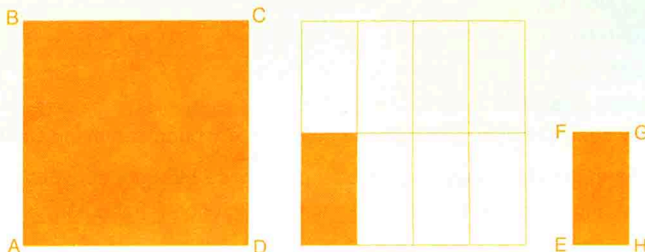




CẦU THANG CANTOR

Cầu thang Cantor được xây dựng phức tạp hơn các fractal mà chúng ta đã nghiên cứu. Mỗi bước biến đổi trong quá trình xây dựng cầu thang Cantor là sự kết hợp của 4 bước biến đổi khác nhau. Để tìm hiểu cách biến đổi của cầu thang Cantor chúng ta hãy làm quen với một cách biến đổi như sau :

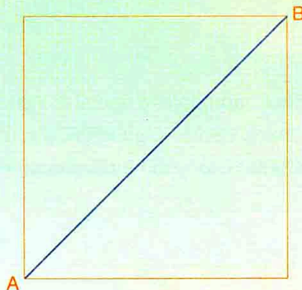
Bắt đầu với hình vuông ABCD. Nếu như ta thu hình vuông này theo phương nằm ngang với tỉ lệ $^1/_4$ và theo phương thẳng đứng với tỉ lệ $^1/_2$ thì ta sẽ thu được hình chữ nhật EFGH. Như vậy qua phép biến đổi trên ta đã biến một hình vuông thành một hình chữ nhật.

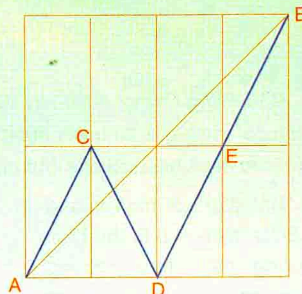




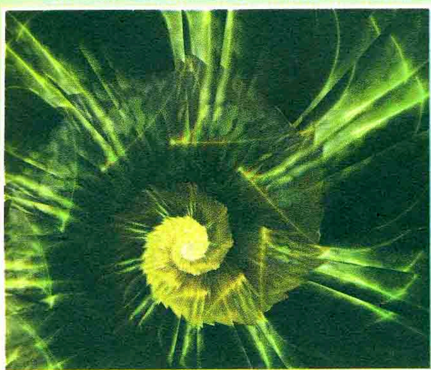


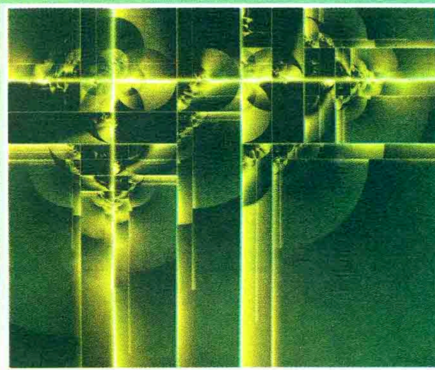
Bây giờ chúng ta cũng bắt đầu với một hình vuông có đường chéo AB. Sử dụng cách biến đổi như trên lần lượt ta sẽ biến đoạn thẳng AB thành các đoạn thẳng AC, CD, DE, EB. Như vậy kết hợp cả 4 lần biến đổi ta đã biến đoạn thẳng AB thành đường gấp khúc ACDEB. Đây cũng chính là bước một của quá trình xây dựng cầu thang Cantor.

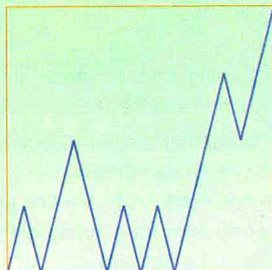


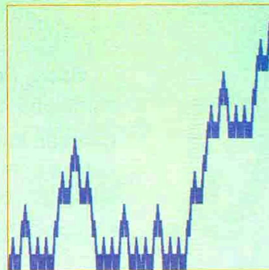


Tiếp theo ta lại sử dụng cách biến đổi này để biến đổi đối với từng đoạn thẳng AC, CD, DE, EB ta sẽ thu được một đường gấp khúc như minh hoạ ở trang bên.





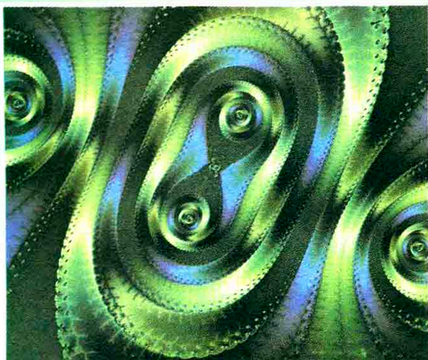


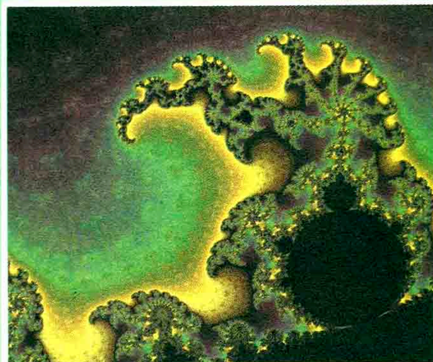


Cứ tiếp tục biến đổi mãi như vậy cuối cùng ta sẽ thu được một fractal được đặt tên là **cầu thang Cantor**.

Cầu thang Cantor còn có tên khác là Cầu thang ma quái vì nó có vô số các bậc thang rộng hẹp khác nhau, có rất nhiều bậc vô cùng hẹp nhưng lại có những bậc rất rộng. Chiều rộng của chúng chính là các khoảng cách tương ứng với khoảng cách giữa các hạt bụi trong đám bụi Cantor.

Tập Cantor không chỉ có ý nghĩa rất lớn đối với một số vấn đề của toán học mà còn được ứng dụng rất hiệu quả trong việc nghiên cứu đường truyền thông tin.





HÃY LÀM QUEN !

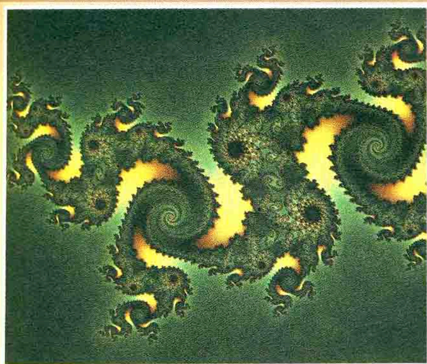


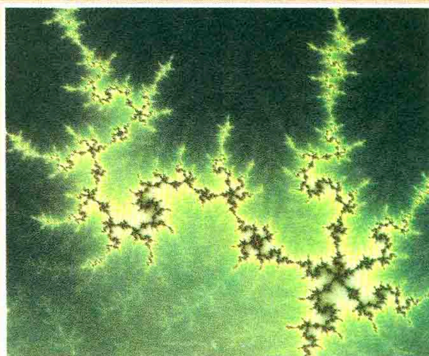
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor sinh ngày 3 tháng 3 năm 1845 tại thành phố St Petersburg (Xanh Pê-téc-bua), nước Nga.

Cha của ông Georg Waldemar Cantor (Gioóc-giơ Uan-đơ-ma Can-tơ) được sinh ra tại Đan Mạch là một người rất nổi tiếng trong lĩnh vực thương mại, chứng khoán nhưng lại rất yêu văn hoá nghệ thuật. Mẹ ông là người Nga, bà rất có năng khiếu âm nhạc chính vì vậy ông được thừa hưởng những khả năng này từ cha mẹ mình, ngoài ra ông còn năng khiếu đặc biệt về toán học.

Ông theo học tại trường St Petersburg đến năm 1856 khi ông 11 tuổi thì cả gia đình ông chuyển đến sinh sống tại Đức nơi có khí hậu ấm áp hơn vì sức khoẻ của cha ông rất yếu. Ở Đức ông học tại trường Realschule (Riu-xkun) và tốt nghiệp năm 1860, sau đó nhận học vị tiến sĩ năm 1867 và dạy học trong một trường dành cho các nữ sinh tại Berlin, năm đó ông mới 22 tuổi. Ông trở thành giáo sư năm 1872 tại Halle (Han-lơ).

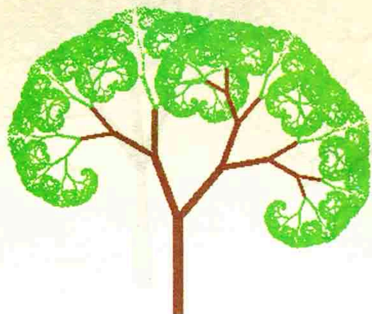
Ông mất ngày 6 tháng 1 năm 1918 tại Halle nước Đức.

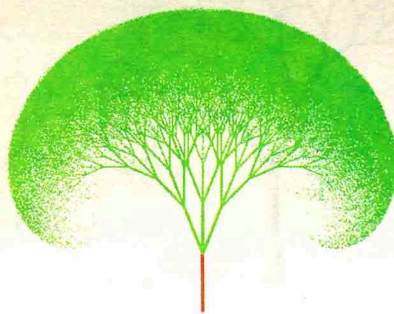


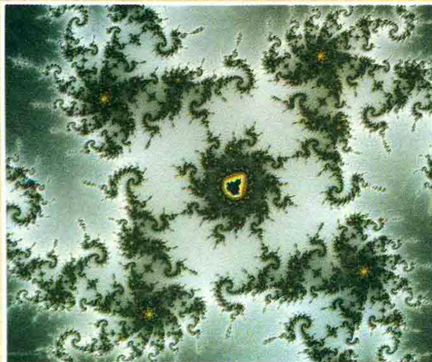


TREE FRACTAL

Những fractal được gọi là **Tree Fractal** chính là các fractal có hình ảnh giống như những cây cối mà chúng ta bắt gặp hằng ngày. Thoạt trông thì ta thấy chúng rất phức tạp nhưng những cấu trúc phức tạp này thực ra cũng chỉ là kết quả của một quá trình phát triển từ một hình dáng

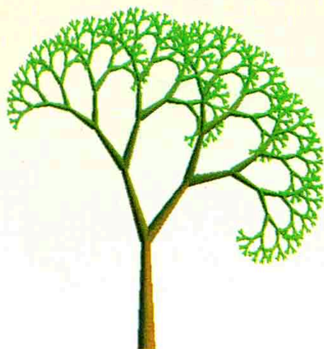


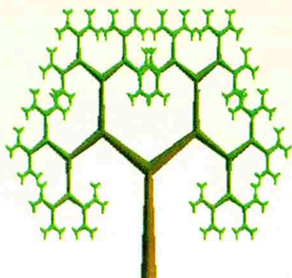


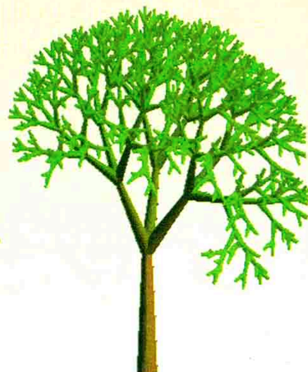


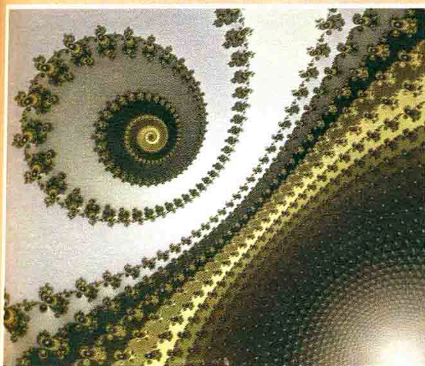


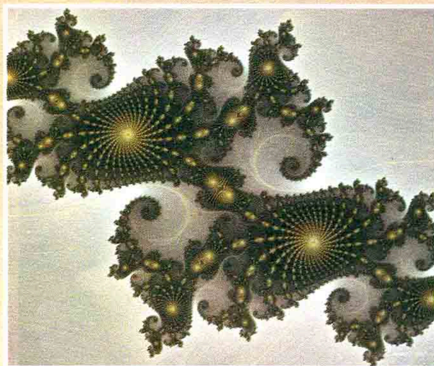
ban đầu rất đơn giản theo một quy tắc nào đó. Sự phức tạp hay rắc rối trong tự nhiên chỉ là một sự vận động, biến đổi được lặp đi lặp lại liên tục của một hình ảnh ban đầu vốn không có gì rắc rối, phức tạp.



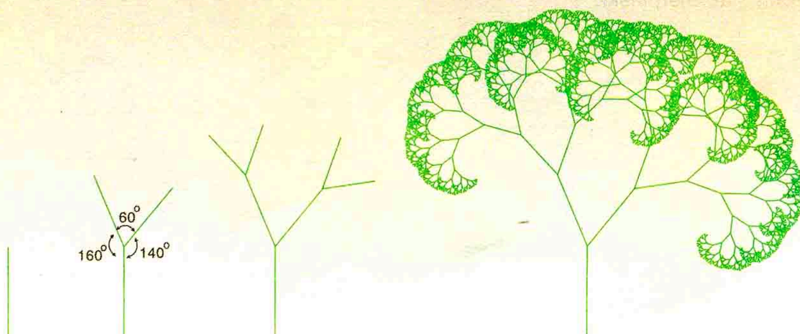


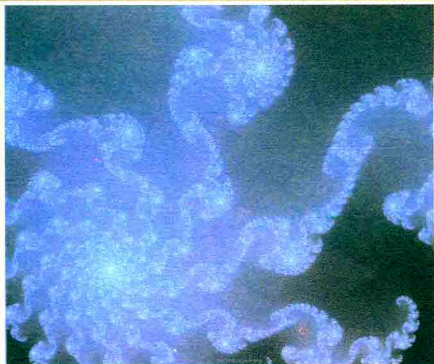


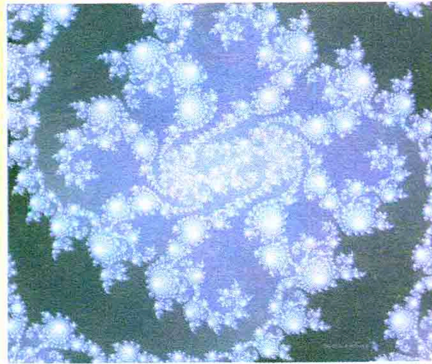




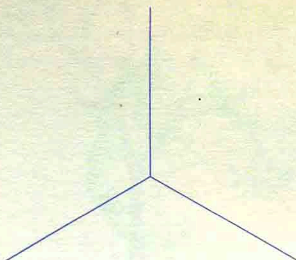
Chúng ta tiến hành xây dựng một Tree Fractal bắt đầu với một đoạn thẳng và tiến hành biến đổi như sau : từ đỉnh phía trên của đoạn thẳng ban đầu vẽ tiếp hai đoạn thẳng bằng nhau và có độ dài bằng $^{7}/_{10}$ độ dài đoạn thẳng ban đầu và lần lượt hợp với đoạn thẳng ban đầu các góc 140^{o} và 160^{o}. Tiếp tục biến đổi như vậy đối với hai đoạn thẳng vừa tạo ra ta sẽ thu được một **Tree Fractal** như hình minh hoạ dưới đây.

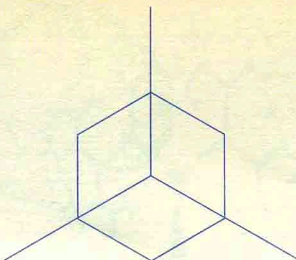


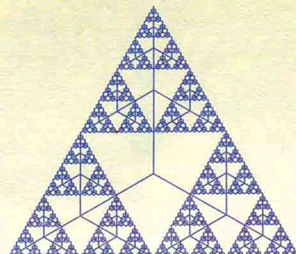




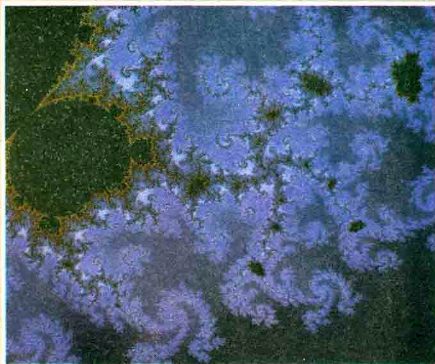
Nếu như ta xây dựng fractal từ hình ban đầu là 3 đoạn thẳng bằng nhau và hợp với nhau một góc 120^{o} với cách biến đổi như sau : dựng thêm một hình lục giác đều có cạnh bằng $^{1}/_{2}$ chiều dài của mỗi đoạn thẳng ban đầu và có tâm là giao điểm của 3 đoạn thẳng này. Cứ tiếp tục biến đổi như vậy cuối cùng ta sẽ được một fractal có tên gọi là **cây tam phân** nhưng lại mang hình dáng của tam giác Sierpinski.











Trong thiên nhiên rất nhiều loài cây có quá trình phát triển giống như vậy. Các minh hoạ dưới đây giúp ta hiểu rõ hơn điều đó.







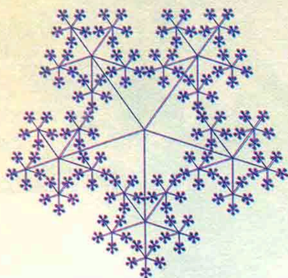


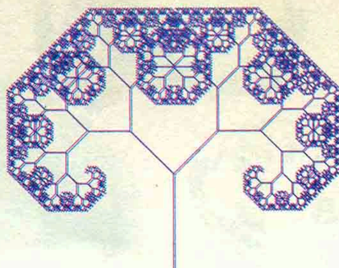


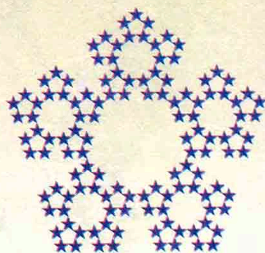


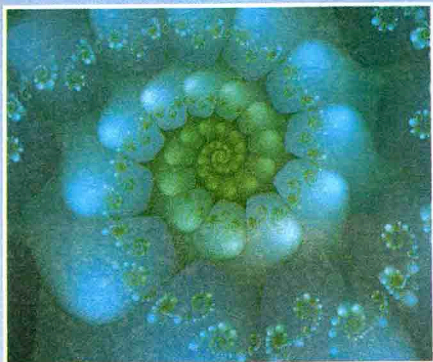


Như vậy đến đây chúng ta hoàn toàn có thể tự tạo ra các fractal của riêng mình bằng cách đặt ra một quy tắc biến đổi nào đó và bắt đầu tiến hành từ một đoạn thẳng, tam giác, hình vuông,... để cuối cùng thu được những hình ảnh thú vị và ngược lại mỗi khi bắt gặp một hình dáng nào đó các em hãy thử suy nghĩ xem nó bắt đầu từ cái gì và quy luật biến đổi của nó ra sao. Ngay bây giờ các em hãy thử tìm ra quy luật biến đổi của các fractal đơn giản sau đây.







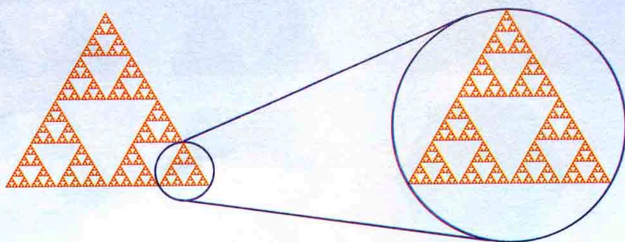




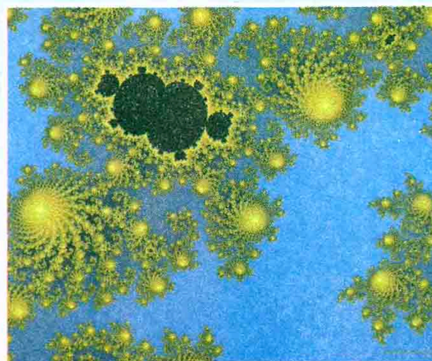
TỰ ĐỒNG DẠNG VÀ TỰ AFIN - ĐẶC TRƯNG CỦA FRACTAL

Tất cả các hình mà chúng ta đã nghiên cứu như đường cong Von Koch, tam giác Sierpinski,... được nhà toán học Mandelbrot (Man-đen-brôt) đặt tên là **Fractal**. Chúng hoàn toàn khác lạ so với những hình mà chúng ta đã biết trong hình học Euclid như tam giác, hình vuông, hình tròn,... Chúng đều có cấu trúc rất phức tạp nhưng chính những cấu trúc phức tạp này lại được tạo ra bằng những quy tắc hết sức đơn giản. Những quy tắc này được gọi là **quy tắc sinh**.

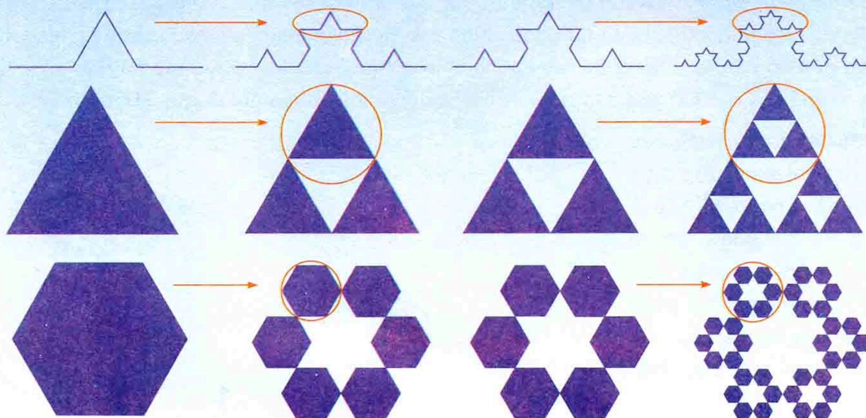
Một đặc trưng khác của nhiều fractal mà chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy đó là chúng có thể phân tích ra thành nhiều bộ phận nhỏ tuỳ ý, nhưng mỗi bộ phận nhỏ bé này lại có cấu trúc giống y hệt với toàn thể.



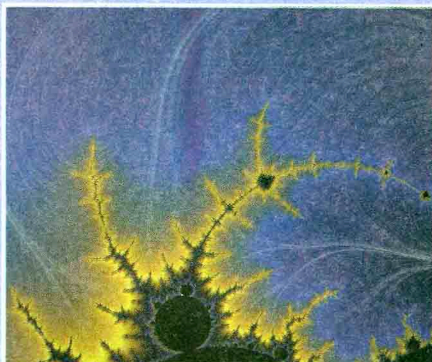




Hay nói một cách khác chúng chính là một bản sao thu nhỏ của cả fractal. Tính chất này được gọi là **tính tự đồng dạng của fractal**. Đường cong Von Koch, tấm đệm Sierpinski,... là những fractal có tính tự đồng dạng.



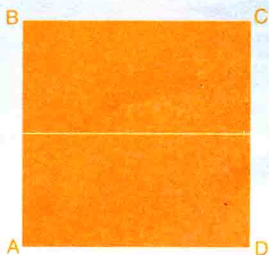


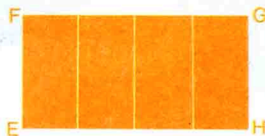


Phép biến đổi đồng dạng là phép biến đổi co dãn một hình theo các phương khác nhau với cùng một tỉ số và nó chỉ là một trường hợp đặc biệt của **phép biến đổi afin** là phép biến đổi co dãn một hình theo các phương khác nhau với những tỉ số khác nhau. Chính vì vậy phép biến đổi afin có thể biến hình vuông thành hình chữ nhật,...

Ví dụ nếu như ta thu hình vuông ABCD theo phương thẳng đứng với tỉ lệ $^1/_2$ thì ta sẽ thu được hình chữ nhật EFGH thu tiếp hình này theo phương nằm ngang với tỉ lệ $^1/_4$ ta sẽ thu được hình chữ nhật MNIK. Như vậy qua phép biến đổi hình vuông ABCD theo phương nằm ngang với tỉ lệ $^1/_4$ và theo phương thẳng đứng với tỉ lệ $^1/_2$ thì ta sẽ thu được hình chữ nhật MNIK. Như vậy ta đã biến một hình vuông thành một hình chữ nhật.

Trong cách xây dựng cầu thang Cantor chúng ta đã sử dụng phép biến đổi afin.











Lá cây dương xỉ hay cành của một số loại cây khác chính là các fractal tự afin, từng bộ phận nhỏ của chúng lại chính là bản sao thu nhỏ của toàn bộ qua một phép biến đổi afin nào đó.



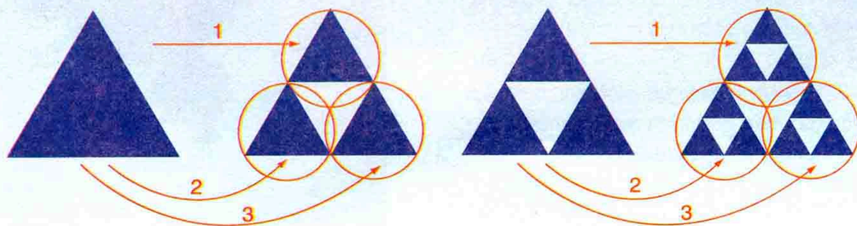




MÃ DI TRUYỀN HÌNH HỌC

Với hiểu biết về phép biến đổi đồng dạng và phép biến đổi afin chúng ta có một cách nhìn khác tổng quát hơn về cách xây dựng một fractal. Chẳng hạn với tam giác Sierpinski quy tắc sinh của nó chính là tổng hợp của ba phép biến đổi đồng dạng 1, 2, 3 như minh hoạ dưới đây. Ba phép biến đổi này được gọi là **sơ đồ hàm lặp** của fractal hay còn gọi là một **IFS** (**I**nterated **F**unction **S**cheme).

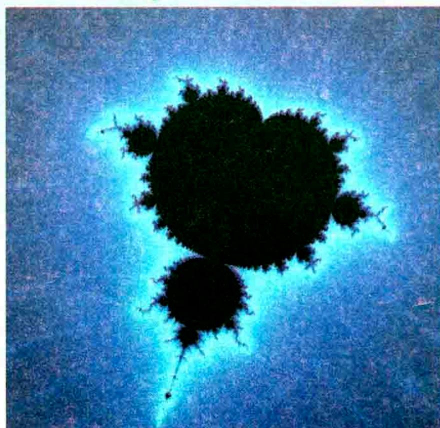
Chúng ta có thể ví **IFS** như một mã di truyền hình học chứa thông tin cô đọng về cách hình thành của fractal. Điều này được ứng dụng rất hiệu quả trong kĩ thuật nén dữ liệu và truyền hình ảnh.







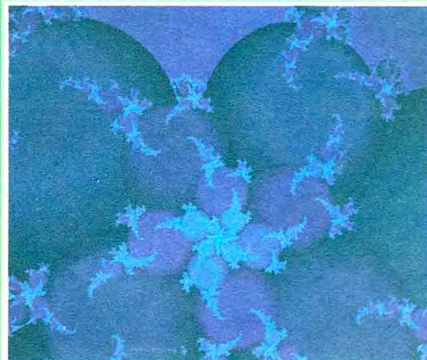
TẬP MANDELBROT (MAN-ĐEN-BRÔT)



Đây chính là một fractal tiêu biểu nhưng để hiểu được nó thì cần phải có những kiến thức toán học vượt xa trình độ Trung học phổ thông. Chính vì vậy trong nội dung cuốn sách này tác giả chỉ đưa ra hình ảnh và tính chất rất đặc biệt của nó.

Tập Mandelbrot chính là hình một "con bọ" khổng lồ xung quanh được gắn vô vàn các "con bọ" lớn nhỏ khác nhau. Mỗi "con bọ" này lại được gắn tiếp những "con bọ" nhỏ hơn... Cứ như vậy lặp đi lặp lại đến vô cùng.

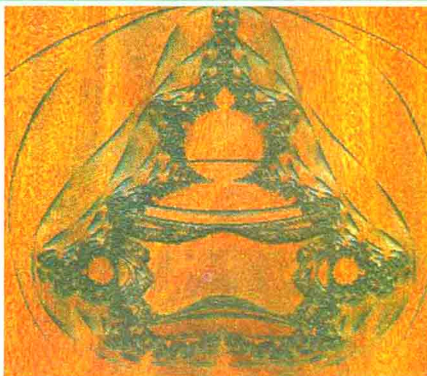




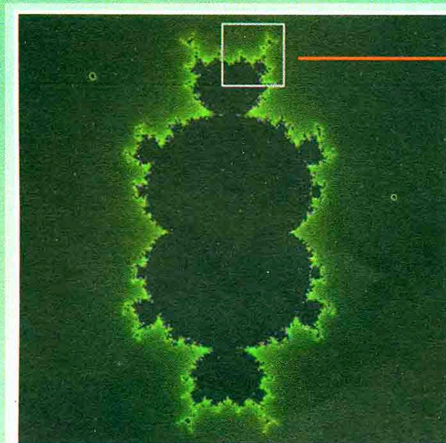
Nhưng điều lí thú của tập Mandelbrot chính là ở chỗ nếu phóng lớn bất kì một vùng nào đó thì chúng ta lại thấy ở những vùng này có những "con bọ" lớn được gắn xung quanh nhiều các "con bọ" lớn nhỏ khác nhau. Nếu tiếp tục phóng lớn các bộ phận nhỏ li ti này thì lại thu được những hình thù rất lạ lẫm khác nhau với màu sắc rực rỡ.

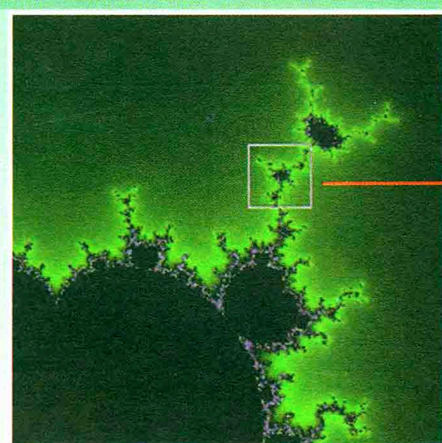
Tập Mandelbrot có cấu trúc hết sức tinh vi bao gồm nhiều tầng, nhiều lớp lớn nhỏ khác nhau và chúng được lặp lại gần giống nhau.

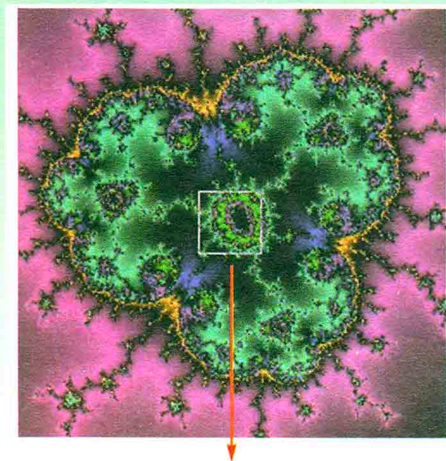
Để khám phá điều này chúng ta hãy quan sát từng bước phóng lớn một tập Mandelbrot "*bậc 3*" được tạo ra bằng máy tính.

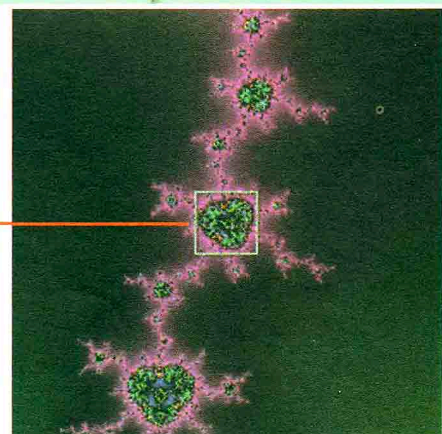


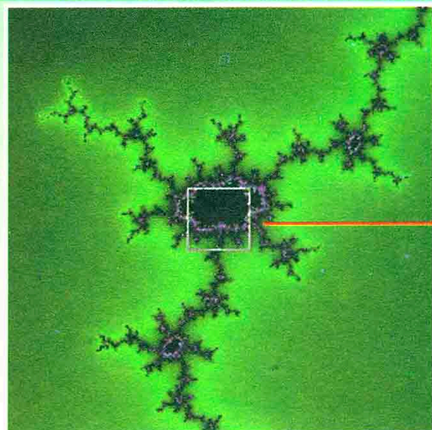
Hình ảnh fractal Mandelbrot được khắc trên gỗ

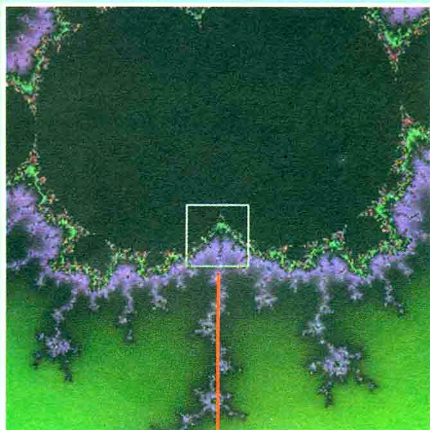


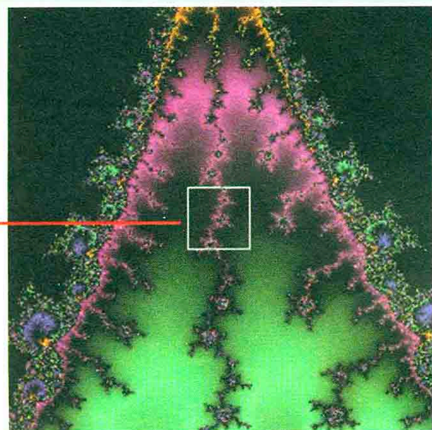


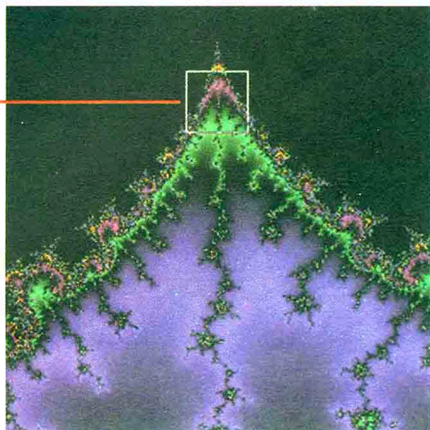


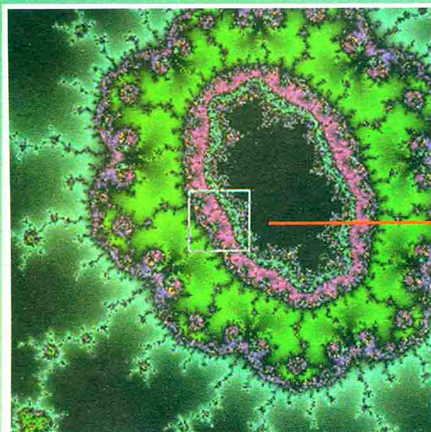


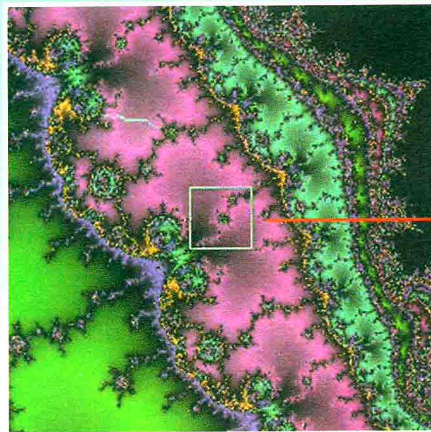




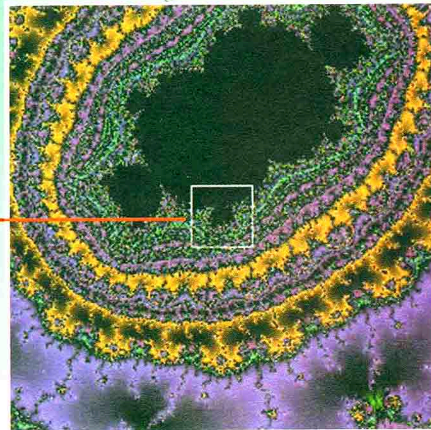


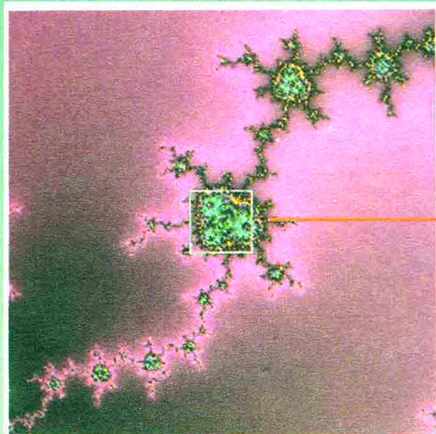


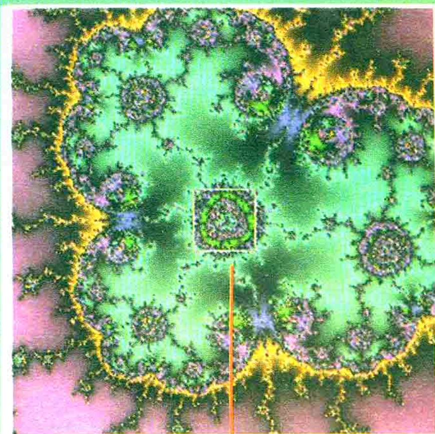


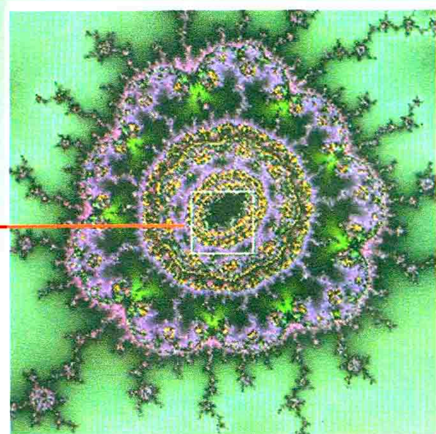


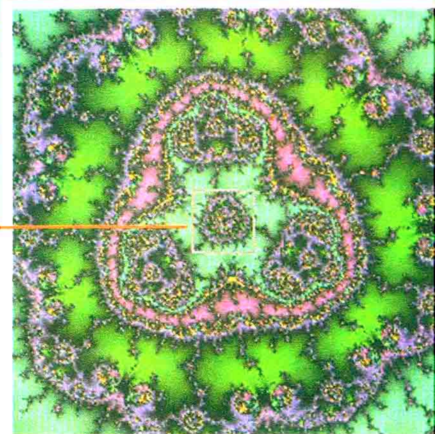




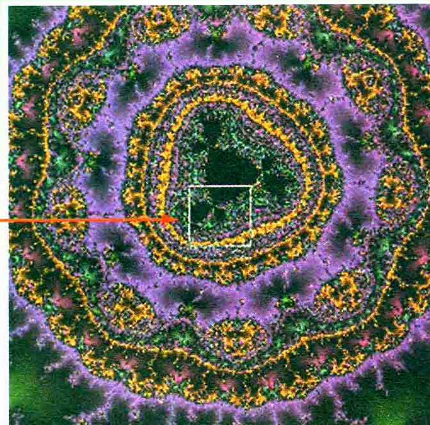


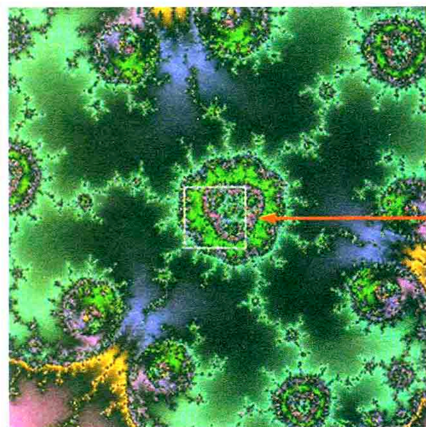


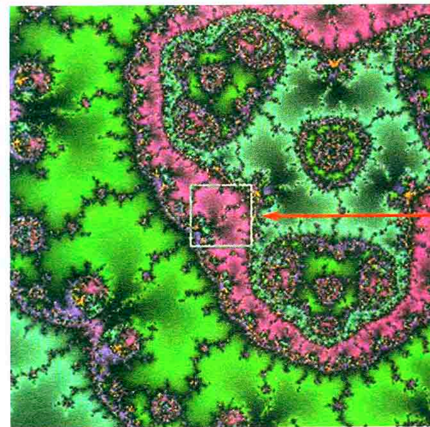


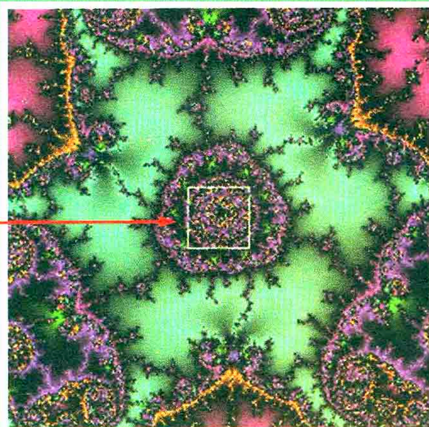


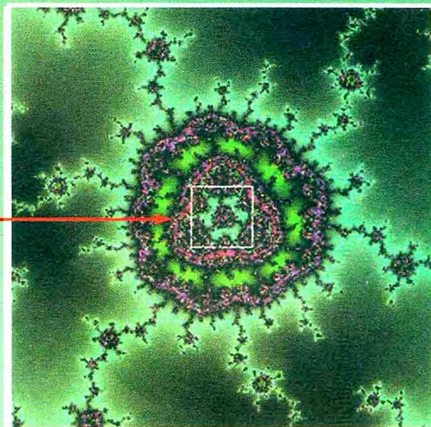


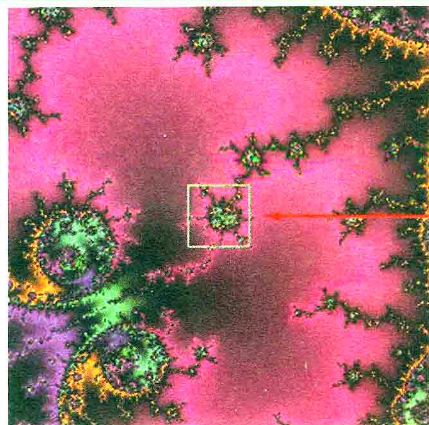


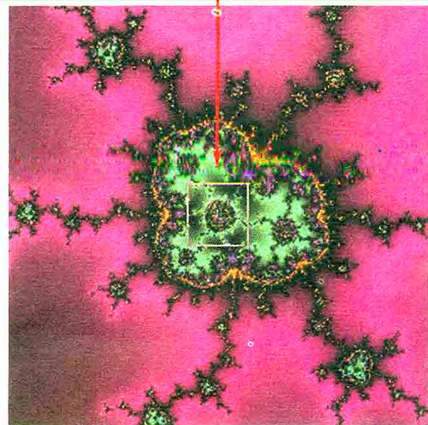


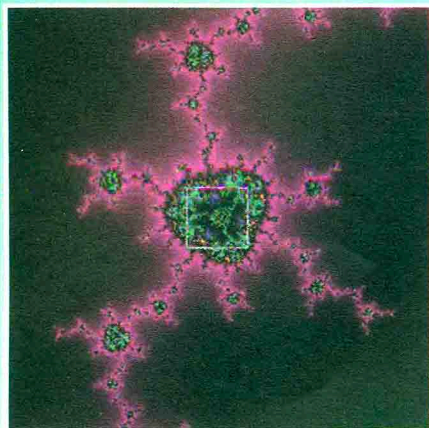


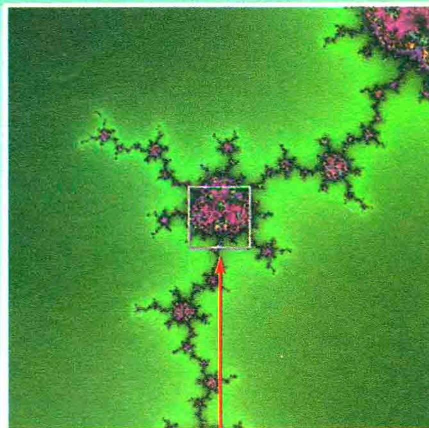


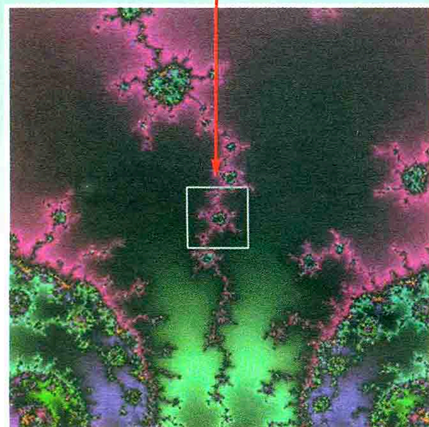




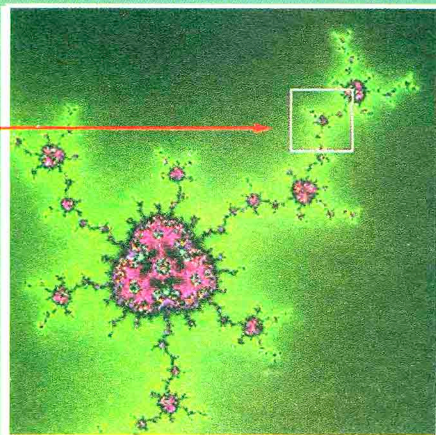


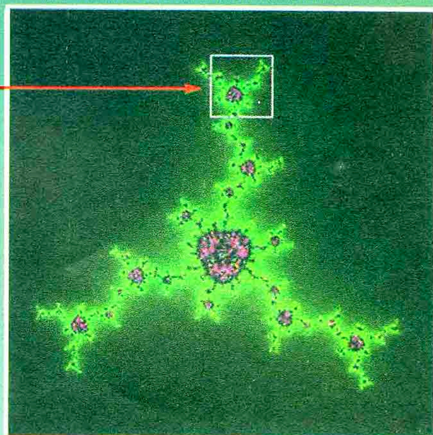






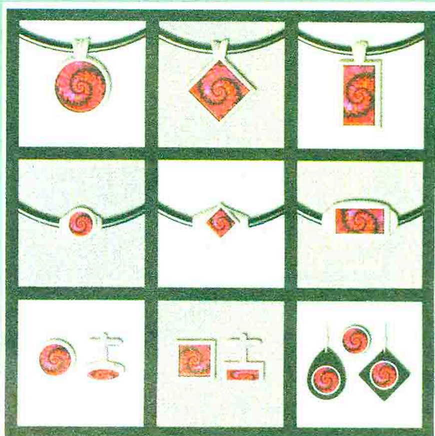




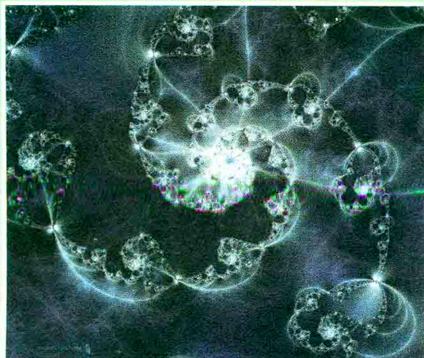


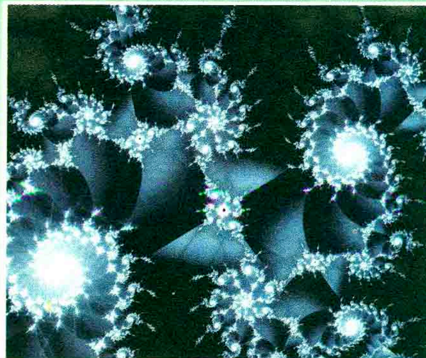
Tập Mandelbrot do nhà toán học gốc Ba Lan là Benoit Mandelbrot tìm ra. Ông chính là người đã khai sinh ra môn hình học fractal cùng với lí thuyết toán học chặt chẽ về nó. Chính tên gọi FRACTAL cũng do ông đặt ra theo chữ la tinh FRACTUS có nghĩa là gãy, vỡ để nhắc tới hình ảnh gãy vỡ của tập Cantor đây cũng chính là fractal được nghiên cứu trước tiên.

Ngày nay cùng với sự hỗ trợ của kĩ thuật đồ hoạ trên máy tính, hình học fractal đã nhanh chóng được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau như xây dựng, khai thác dầu khí, chế tạo, sinh học, âm nhạc, thông tin...



Fractal Mandelbrot được thể hiện trên đồ trang sức





HÃY LÀM QUEN !



Benoit Mandelbrot (Bê-nô-ic Man-đen-brôt) sinh ngày 20 tháng 11 năm 1924 tại thành phố Vacsava, Ba Lan trong một gia đình rất bình thường. Cha ông làm nghề buôn bán quần áo còn mẹ ông là một bác sĩ, nhưng ngay từ nhỏ ông đã rất yêu thích toán học.

Cuộc đời ông cũng độc đáo giống như fractal mang tên ông. Năm 1939 gia đình ông chuyển đến sinh sống tại Pháp và chính tại đây năm 20 tuổi ông thi đỗ vào trường đại học danh tiếng bậc nhất của Pháp École Normale (Ê-côn Noóc) ở Paris nhưng ông cũng chỉ học ở đây có 1 ngày rồi chuyển sang một trường nổi tiếng khác là École Polytechnique (Ê-côn Pô-li-téc-nic). Sau khi tốt nghiệp ông sang Mĩ và được hãng IBM nồng nhiệt tiếp nhận và chính trong khoảng thời gian ở đây ông đã cho ra đời những công trình khoa học của mình và khai sinh ra Hình học fractal nổi tiếng. Do những cống hiến lỗi lạc của mình ông đã được nhận nhiều giải thưởng khoa học trong đó có giải thưởng Wolf (Vôn-phơ) là giải thưởng tương đương với giải Nobel (Nô-ben). Sau khi rời khỏi hãng IBM ông đến dạy học tại trường Đại học Yale (Dên) và trở thành giáo sư toán học tại đây.

MỤC LỤC

LỜI NHÀ XẤT BẢN	3
MỞ ĐẦU	6
ĐƯỜNG CONG VON KOCH	7
BÔNG TUYẾT VON KOCH	11
ĐƯỜNG CONG MINKOWSKI	17
HÒN ĐẢO MINKOWSKI	20
ĐƯỜNG CONG PEANO	23
ĐƯỜNG CONG PEANO-HILBERT	27
RỒNG HEIGHWAY	30
RỒNG LÉVY	38
TAM GIÁC SIERPINSKI	41
TẤM THẢM SIERPINSKI	49
NGŨ GIÁC SIERPINSKI	53
BỌT BIỂN MENGER	59
ĐÁM BỤI CANTOR	62
TẬP CANTOR TRONG MẶT PHẲNG	63
CẦU THANG CANTOR	65
TREE FRACTAL	69
TỰ ĐỒNG DẠNG VÀ TỰ AFIN - ĐẶC TRƯNG CỦA FRACTAL	75
MÃ DI TRUYỀN HÌNH HỌC	79
TẬP MANDELBROT	80

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh VŨ BÁ HÒA

Biên tập nội dung :
ĐẶNG CÔNG HIỆP

Trình bày bìa và thiết kế sách :
PHẠM VIẾT DẦN

Sửa bản in :
THANH BÌNH

Chế bản :
TỔ IN PHIM - NXB Giáo dục tại Thành phố Hồ Chí Minh

VẺ ĐẸP CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG THIÊN NHIÊN

Mã số: 8I170m6 - TTS

In 3.000 bản (12TK), khổ 19,5 x 20,5 cm, tại Công ty In và Văn hóa phẩm.
Số in: 806. Số XB: 02 - 2006/CXB/74 - 1844/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2006.

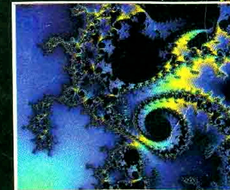
TÌM ĐỌC BỘ SÁCH :

KHÁM PHÁ THẾ GIỚI









Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách và Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

81 Trần Hưng Đạo hoặc 187 Giảng Võ - Hà Nội
15 Nguyễn Chí Thanh - TP. Đà Nẵng
104 Mai Thị Lựu - Quận 1 - TP. Hồ Chí Minh
240 Trần Bình Trọng - Quận 5 - TP. Hồ Chí Minh

